



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет транспортних та інформаційних технологій
Кафедра вищої математики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної роботи
з дисципліни:
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»
для здобувачів:
рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
форма здобуття вищої освіти – заочна
галузь знань D «Бізнес, адміністрування та право»
спеціальність D2 «Фінанси, банківська справа,
страхування та фондовий ринок»
освітньо – професійна програма
«Фінанси, банківська справа та страхування»



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет транспортних та інформаційних технологій
Кафедра вищої математики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної роботи
з дисципліни:
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»
для здобувачів:

рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
форма здобуття вищої освіти – заочна
галузь знань *D «Бізнес, адміністрування та право»*
спеціальність *D2 «Фінанси, банківська справа,*
страхування та фондовий ринок»
освітньо – професійна програма
«Фінанси, банківська справа та страхування»

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні Науково - методичної ради
Національного транспортного університету
Протокол № 34 від «30» квітня 2025 р.
Перший проректор, професор
_____ **Олександр МЕЛЬНИЧЕНКО**

КИЇВ – 2025

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів: рівень вищої освіти – перший (бакалаврський), форма здобуття вищої освіти – заочна, галузь знань *D «Бізнес, адміністрування та право»*, спеціальність *D2 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок»*, освітньо–професійна програма «Фінанси, банківська справа та страхування» / Розробники: Л.В. Левківська, І.В. Горбунович, Л.В. Шевчук – К.: НТУ, 2025. – 67 с.

Розробники:

канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики Людмила ЛЕВКІВСЬКА

канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики Ірина ГОРБУНОВИЧ

канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики Людмила ШЕВЧУК

Рекомендовано Методичною комісією факультету заочного,

дистанційного навчання та підготовки іноземних громадян

протокол № 20 від « 14 » квітня 2025 року

Голова Методичної комісії факультету _____ Віталій СІМОНЕНКО

© Людмила ЛЕВКІВСЬКА, Ірина ГОРБУНОВИЧ, Людмила ШЕВЧУК, 2025р.

© Національний транспортний університет, 2025р.

Вступ	5
1 ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	7
1.1 <i>Випадкові події. Означення ймовірності.....</i>	<i>7</i>
1.2 <i>Основні теореми теорії ймовірностей.....</i>	<i>11</i>
1.3 <i>Повторні незалежні випробування</i>	<i>16</i>
1.4 <i>Випадкові величини</i>	<i>19</i>
1.5 <i>Основні поняття математичної статистики.....</i>	<i>22</i>
1.6 <i>Оцінювання параметрів розподілу генеральної сукупності.....</i>	<i>29</i>
2 ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	34
3 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	47
Додатки 1 – 5.....	62
Список рекомендованої та використаної літератури.....	66

ВСТУП

«Теорія ймовірностей та математична статистика» займає важливе місце у навчальному процесі підготовки бакалавра з фінансів, банківської справи та страхування, оскільки формує базові знання у сфері застосування ймовірнісно-статистичного апарата для розв'язування теоретичних і практичних задач у професійній діяльності, сприяє подальшому розвитку логічного мислення та оволодінню основними методами дослідження і розв'язування практичних та прикладних задач у різних аспектах фінансової, банківської та страхувальної діяльності.

Для студентів факультету заочного, дистанційного навчання та підготовки іноземних громадян спеціальності D2 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок» освітньо-професійної програми «Фінанси, банківська справа та страхування» навчальним планом передбачені лекційні і практичні заняття з теорії ймовірностей та математичної статистики протягом настановчої сесії та під час екзаменаційної сесії. Але ці заняття носять переважно оглядовий характер. Їх мета – звернути увагу на загальні розділи курсу, розглянути окремі питання програми (основні, найбільш складні для сприйняття або недостатньо повно висвітлені в рекомендованій літературі), сформулювати основні теореми та ключові формули, детально розібрати найбільш значущі практичні задачі. Зазвичай цього недостатньо для глибокого вивчення учбового матеріалу, тому студенти-заочники повинні багато працювати над матеріалом самостійно, використовуючи підручники, навчальні посібники та інші джерела. В цьому їм також допоможуть дані методичні вказівки, де приводяться всі необхідні для освоєння дисципліни теоретичні відомості, які ілюструються достатньою кількістю розв'язаних практичних задач.

Мета даних методичних вказівок – ознайомити студентів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей і математичної статистики, допомогти їм набути первинних навичок застосування теоретичного матеріалу на практиці, сформувати вміння проводити комплексний статистичний аналіз математичних моделей, що описують реальні соціально-економічні явища і процеси та є необхідними для аналізу фінансових, банківських та страхових ризиків, прийняття обґрунтованих рішень в умовах невизначеності та обробки статистичних даних.

У процесі вивчення "Теорії ймовірностей та математичної статистики" студенти спеціальності D2 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок» повинні знати:

- основні поняття і теореми теорії ймовірностей;
- алгоритми знаходження ймовірностей випадкових величин;
- типи випадкових величин та закони їх розподілу;
- формули для обчислення числових характеристик випадкових величин;
- основні поняття математичної статистики;
- методи оцінювання параметрів: точкові та інтервальні оцінки.

Вміти:

- обчислювати ймовірності подій за допомогою комбінаторики;
- застосовувати формули повної ймовірності та Байєса для аналізу ризиків;
- працювати з функціями розподілу та щільності ймовірностей;
- аналізувати випадкові величини, знаходити їхні характеристики;
- використовувати ймовірнісні моделі для оцінки фінансових та страхових ризиків;
- збирати, групувати та візуалізувати статистичні дані;
- обчислювати основні описові статистики для аналізу фінансових показників;
- будувати довірчі інтервали для оцінки параметрів (наприклад, середньої дохідності інвестицій).

«Теорія ймовірностей та математична статистика» готує студентів до роботи в умовах невизначеності, де потрібні точні розрахунки та обґрунтовані прогнози. Фахівці з фінансів та страхування використовують теорію ймовірностей для оцінки ризиків і прибутковості інвестицій. Банківські працівники застосовують статистичні методи для кредитного скорингу та аналізу фінансової стабільності.

У процесі вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» студент заочної форми навчання освітньо-професійної програми «Фінанси, банківська справа та страхування» має самостійно виконати контрольну роботу, яка складається з ряду практичних задач, сформульованих у відповідності до робочої програми.

Контрольну роботу необхідно виконувати в окремому зошиті в клітинку, на обкладинці якого вказується дисципліна, група і курс, прізвище та ім'я студента, а також номер залікової книжки. При написанні контрольної роботи спочатку записують номер варіанту, який відповідає порядковому номеру студента в списку групи. Далі зазначають умову кожного завдання і наводять їх розв'язання. При цьому розв'язки задач і пояснення до них повинні бути досить детальними з посиланнями на відомі формули та теореми. Вони можуть також супроводжуватись відповідними рисунками та графіками, які необхідно виконувати простим олівцем. У цьому методичному посібнику представлені приклади виконання та правильного оформлення контрольної роботи. В контрольній роботі повинні бути розв'язані завдання лише свого варіанту. Робота, яка містить завдання чужого варіанту, не перевіряється.

У разі виникнення питань або неможливості самостійного розв'язання деяких контрольних завдань, необхідно звернутися до викладачів кафедри для отримання від них корисних настанов у вигляді усної чи письмової консультації. Але в своїх запитах студент має чітко сформулювати що саме для нього є незрозумілим.

Правильно виконана та успішно захищена контрольна робота є допуском студента до складання заліку з теорії ймовірностей та математичної статистики.

1 ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1.1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності притаманні масовим випадковим явищам. Вона складається з двох розділів: *випадкові події* та *випадкові величини*.

Випадковою подією називають подію, відносно якої перед експериментом (випробуванням) неможна сказати з'явиться вона чи ні. Прикладами випробувань, наприклад, є: постріл з гвинтівки, підкидання грального кубика і т.п. Їм відповідають такі випадкові події: попадання в ціль або промах, поява того чи іншого числа очок на верхній грані кубика.

Для позначення подій використовують великі літери латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$, а у випадку їх великої кількості – літери з індексами: $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Подію називають *достовірною*, якщо в даному випробуванні вона обов'язково настане і *неможливою*, якщо у випробуванні вона завідомо не може відбутися. Достовірну подію позначають U , а неможливу – V .

Так, наприклад, при вилученні кулі з урни, в якій всі кулі білі подія U – виймуть білу кулю є достовірною подією; а подія V – виймуть чорну кулю – неможливою подією.

Дві події вважають *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої (не зможуть відбутися разом) в одному і тому ж випробуванні. В протилежному випадку події є *сумісними*.

Наприклад, якщо мають дві коробки деталей. Із кожної коробки вибирають навмання по одній деталі. В цьому разі вибір стандартної деталі і з першої коробки, і з другої – будуть подіями сумісними.

Дві події, які зустрічаються в одному випробуванні, називають *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулась чи не відбулась інша подія. В іншому випадку, події – *залежні*.

Події вважають *протилежними*, якщо в даному випробуванні вони несумісні і одна з них обов'язково відбувається. Подію, протилежну події A , позначають через $\bar{A}$. Прикладами протилежних подій можуть бути влучення і промах при пострілі.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *рівноможливими*, якщо жодна з цих подій не має переваги над іншою. Наприклад, при підкиданні грального кубика ні одна із граней не має переваги перед іншою.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$, попарно несумісні та рівноможливі, утворюють *повну групу подій*, з яких хоча б одна неминуче відбудеться, тобто сума цих подій є подією достовірною. Наприклад, підкидають шестигранний кубик. Позначимо події: A_1 – випала грань з цифрою 1; A_2 – випала грань з цифрою 2; A_3 – випала грань з цифрою 3; A_4 – випала грань з цифрою 4; A_5 – випала грань з цифрою 5; A_6 – випала грань з цифрою 6. Події $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ утворюють повну групу.

Над подіями можна виконувати наступні операції: додавати та множити.

Об'єднанням (сумою) двох подій A і B називають подію $A \cup B$ (або $A+B$), яка полягає в тому, що відбулася принаймні одна з подій A або B .

Перетином (добутком) двох подій називають подію $A \cap B$ (або $A \cdot B$), яка полягає в тому, що відбулася і подія A , і подія B .

Мірою можливості появи події є її **ймовірність**. Це поняття належить до основних базових понять теорії ймовірностей.

У практичних застосуваннях здебільшого розглядають випробування, які зводяться до так званої *класичної схеми* і в яких обчислення ймовірності суттєво спрощується. Класична ймовірнісна схема стосується *випадкових подій*. Це події, які утворюють *повну групу, несумісні і рівноможливі*.

В умовах класичної ймовірнісної схеми **ймовірністю появи події** A називають відношення кількості сприятливих випадків до загальної кількості всіх рівноможливих випадків у даному експерименті, тобто:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1.1)$$

де m – кількість сприятливих випадків щодо появи події A ,

n – загальна кількість всіх рівноможливих випадків щодо події A .

Літера P походить від французького *probabilite* – ймовірність.

Приклад 1.1.

В сірниковій коробочці лежать 12 білих та 8 чорних гудзиків. Яка ймовірність того, що навмання виїнятий з коробочки гудзик буде білим?

Розв'язання: Нехай подія A – виїнятий гудзик білий.

Зрозуміло, що $n=12+8=20$ – кількість всіх рівноможливих випадків появи події.

Кількість сприятливих випадків появи події A згідно умови задачі складає 12, тобто $m=12$.

Отже, скориставшись формулою (1.1.1), маємо:

$$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

З класичного означення ймовірності випливають *наступні властивості*:

1. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, тобто:

$$P(U) = 1.$$

Якщо подія достовірна, то число сприятливих випадків дорівнює числу всіх рівноможливих, тобто $m=n$ і тому:

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто:

$$P(V) = 0.$$

Якщо подія неможлива, то ні один із результатів випробувань не сприяє появі події, тобто $m = 0$ і, отже:

$$P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Ймовірність випадкової події завжди має значення з проміжку від нуля до одиниці, тобто:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Випадковій події A сприяє лише частина із загального числа результатів випробувань. У цьому разі $0 \leq m \leq n$, а отже,

$$\frac{0}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n}, \quad \text{тобто} \quad 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Значення m і n знаходять або безпосередньо з умов випробування, або при розв'язуванні багатьох задач із застосуванням формул та правил комбінаторики.

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає питання розташування та вибору об'єктів за певними правилами, і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна зробити.

Основні формули комбінаторики:

1. Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину, що складається з n елементів. Кількість перестановок з n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою:

$$P_n = n!, \quad (1.1.2)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (читається, як "ен факторіал»),

$$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!,$$

$$0! = 1.$$

Приклад 1.2.

Скількома способами 4 різні книги можна розставити на полиці?

Розв'язання: Кількість таких способів дорівнює числу перестановок з 4-х елементів, тобто за формулою (1.1.2):

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

2. Розміщенням з n елементів по k ($k \leq n$) вважається впорядкована k елементна підмножина n -елементної множини, елементи якої відрізняються між собою або порядком.

Число розміщень з n елементів по k позначають A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.1.3)$$

Приклад 1.3.

У футбольній лізі 15 команд. Скількома способами золота, срібна і бронзова медалі можуть бути розподілені між цими командами?

Розв'язання: Оскільки медалі різні (золота, срібна і бронзова), то шукане число кількості способів буде рівне розміщенню з 15 по 3.

Тоді за формулою (1.1.3) одержимо:

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$$

різних варіантів розподілу медалей між цими командами.

3. Комбінацією (сполученням) з n елементів по k ($k \leq n$) називають будь-яку k елементну підмножину n -елементної множини, в якій порядок елементів не враховується. Число різних таких комбінацій позначають C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (1.1.4)$$

причому $C_n^1 = n$, $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Приклад 1.4.

У ящику лежать 10 однакових деталей. Скількома способами можна вибрати навмання з цього ящика 2 деталі?

Розв'язання: Оскільки порядок вибору деталей не є важливим, то число способів вибору деталей буде рівне числу комбінацій з 10 елементів по 2.

Тоді за формулою (1.1.4) одержимо:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45 \text{ способів.}$$

Основні правила комбінаторики

Правило суми: Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B можна вибрати n способами, то один з об'єктів **або** A **або** B можна вибрати $(m + n)$ способами.

Правило добутку: Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами і після такого вибору інший об'єкт B вибрати (незалежно від вибору об'єкта A) n способами, то пари об'єктів A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Ці правила можна застосовувати для будь-якого скінченного числа множин.

1.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Сумою декількох подій називають подію, яка означає появу хоча б однієї з цих подій.

Теорема додавання ймовірностей по-різному формулюються для несумісних та сумісних подій.

Теорема 1.2.1. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.2.1)$$

З цієї теореми випливають декілька наслідків:

Наслідок 1. Якщо випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ - попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (1.2.2)$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій A і $\bar{A}$ дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.2.3)$$

Приклад 1.2.1.

На змаганнях зі стрільби стрілець влучає в десятку з ймовірністю 0,03, в дев'ятку – з ймовірністю 0,2, у вісімку – з ймовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілець набере більше восьми очок?

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – стрілець влучив у дев'ятку,

B – стрілець влучив у десятку.

Тоді $(A + B)$ – влучення в дев'ятку або десятку при одному пострілі.

Події A і B – *несумісні*, тому згідно формули (1.2.1), маємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,2 + 0,03 = 0,23.$$

Теорема 1.2.2. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (1.2.4)$$

Теорема 1.2.2 може розповсюджуватися на будь-яку кількість сумісних подій.

Добутком декількох подій називають подію, яка означає спільну появу всіх цих подій.

Теорема множення ймовірностей по-різному формулюються для незалежних та залежних подій.

Для характеристики залежних подій вводять поняття **умовної ймовірності**.

Ймовірність події A , обчислена за умови, що подія B відбулась називають **умовною ймовірністю** події A і позначають $P_B(A)$.

Аналогічно, умовна ймовірність появи події B , за умови, що відбулась подія A , позначається символом $P_A(B)$.

Теорема 1.2.3. *Ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.2.5)$$

Ймовірність спільної появи більшої кількості подій, незалежних сукупно, обчислюють за формулою:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (1.2.6)$$

Приклад 1.2.2.

У трьох коробках лежать по 10 деталей. У першій коробці – 8, в другій – 7 і в третій – 9 стандартних деталей. Із кожної коробки навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі три вийняті деталі будуть стандартними.

Розв’язання. Ймовірність того, що з першої коробки вийнята стандартна деталь (подія A), дорівнює за формулою (1.1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Ймовірність того, що з другої коробки вийнята стандартна деталь (подія B), дорівнює:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Ймовірність того, що з третьої коробки вийнята стандартна деталь (подія C), дорівнює:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Оскільки події A , B , C незалежні, то шукана ймовірність (за теоремою множення – формула (1.2.6)) дорівнює:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Теорема 1.2.4. *Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія вже відбулась:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (1.2.7)$$

Якщо маємо три події A , B , C , залежні між собою, то теорема множення ймовірностей матиме вигляд:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C). \quad (1.2.8)$$

Приклад 1.2.3.

Студент вивчив 20 із 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що він відповів на всі три питання, які були в екзаменаційному білеті.

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – студент відповів на перше питання,

B – студент відповів на друге питання,

C – студент відповів на третє питання.

У нашому випадку маємо:

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0,8, \quad P_A(B) = \frac{19}{24} \approx 0,79, \\ P_{AB}(C) = \frac{18}{23} \approx 0,78.$$

Події A , B і C у даному випадку – залежні між собою, тому згідно формули (1.2.8), маємо:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) \approx 0,8 \cdot 0,79 \cdot 0,78 \approx 0,49.$$

Наслідком теорем додавання та множення ймовірностей є *теорема для обчислення ймовірності появи в результаті випробування хоча б однієї із незалежних у сукупності подій*.

Теорема 1.2.5. *Ймовірність появи хоча б однієї із подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних сукупно, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій:*

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n), \quad (1.2.9)$$

де $P(\bar{A}_1), P(\bar{A}_2), \dots, P(\bar{A}_n)$ – ймовірності протилежних подій.

При розв'язуванні деяких задач на обчислення ймовірностей доводиться поєднувати теореми додавання і множення.

Якщо подія A має складну структуру, то пряме визначення її ймовірності за класичним означенням може виявитись надто важким завданням. У такому випадку виникає питання про можливість розглянути подію A разом з іншими подіями, ймовірності яких відомі, і на основі розглянутих подій знайти ймовірність події A . Виявляється, що це можливо, і відповідь на поставлене питання дає формула повної ймовірності.

Нехай подія A може відбутись лише одночасно з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій H_i відбудеться подія A , то події H_i називають **гіпотезами**.

Якщо ймовірності гіпотез задані або їх можна обчислити з умов випробування, то ймовірність події A можна обчислити за **формулою повної ймовірності**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \quad (1.2.10)$$

де $P(H_i)$ – ймовірності гіпотез H_i ;

$P_{H_i}(A)$ – умовні ймовірності події A , обчислені за умови, що відповідна гіпотеза H_i відбулась.

При розв'язуванні задач на знаходження повної ймовірності варто дотримуватись такої послідовності:

- 1) визначити гіпотези і знайти їх ймовірності (якщо гіпотези рівноможливі, то їх ймовірності рівні, а якщо нерівноможливі, їх ймовірності різні, але в обох випадках сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці);
- 2) знайти умовні ймовірності;
- 3) скористатись формулою повної ймовірності.

Якщо випробування, в якому спостерігалася подія A , відбулося, і необхідно переоцінити правильність ймовірностей гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, то для цього застосовують **формулу Байєса** (за ім'ям англійського математика, який опублікував її у 1764 р.) або **формулу гіпотез**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.11)$$

де $P(A)$ – повна ймовірність події A .

Приклад 1.2.4.

Перший верстат виготовляє у два рази більше продукції, ніж другий, і в три рази більше, ніж третій. При цьому в роботі першого верстата у середньому помічають 3 браковані вироби зі 100, у другого – 2 з 50 виробів, у третього – 3 з 60 виробів. Взята навмання деталь виявилася бракованою. Яким верстатом її ймовірніше за все виготовлено?

Розв'язання.

Нехай подія A – взята деталь бракована.

Гіпотези: H_1 – деталь виготовлена на першому верстаті;

H_2 – деталь виготовлена на другому верстаті;

H_3 – деталь виготовлена на третьому верстаті.

Позначимо

$$P(H_1) = x, \text{ тоді } P(H_2) = \frac{x}{2}; \quad P(H_3) = \frac{x}{3}.$$

Події (гіпотези) H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу, тому:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1,$$

звідки знаходимо : $\frac{11x}{6} = 1, \quad x = \frac{6}{11}.$

Отже, $P(H_1) = \frac{6}{11}; \quad P(H_2) = \frac{3}{11}; \quad P(H_3) = \frac{2}{11}.$

Умовні ймовірності події A знайдемо за класичним означенням ймовірності (1.1.1):

$$P_{H_1}(A) = \frac{3}{100} = 0,03; \quad P_{H_2}(A) = \frac{2}{50} = 0,04; \quad P_{H_3}(A) = \frac{3}{60} = 0,05.$$

За формулою повної ймовірності (1.2.10), маємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{6}{11} \cdot 0,03 + \frac{3}{11} \cdot 0,04 + \frac{2}{11} \cdot 0,05 = \frac{1}{11} (0,18 + 0,12 + 0,1) = \frac{2}{55}.$$

Далі за формулами Байєса (1.2.11) обчислимо ймовірності того, що браковану деталь виготовлено першим, другим, чи третім верстатом:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{11} \cdot 0,03}{\frac{2}{55}} = 0,45;$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{11} \cdot 0,04}{\frac{2}{55}} = 0,3;$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{11} \cdot 0,05}{\frac{2}{55}} = 0,25.$$

Оскільки $P_A(H_1) > P_A(H_2) > P_A(H_3)$, то, наймовірніше за все, узята бракована деталь виготовлена першим верстатом.

1.3 ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

На практиці часто трапляються випадкові експерименти, які полягають в тому, що одне й те ж випробування проводять декілька разів поспіль. Водночас у кожному випробуванні деякі події можуть відбуватись, а можуть і не відбуватись. Наприклад, підкидання кубика чи монети декілька разів, перевірка на якість виробів, які взяті по одному із певної кількості і т.д.

Повторні випробування називають **незалежними**, якщо здійснення будь-якого результату в n -му за рахунком випробуванні не залежить від результатів у попередніх випробуваннях.

Нехай проводиться n послідовних випробувань, ймовірність події A в кожному випробуванні одна й та сама, а випробування незалежні, тоді таку серію випробувань називають **схемою Бернуллі**.

Якщо випадкова подія A відбувається в кожному випробуванні з ймовірністю $p = P(A)$, тоді вона не відбувається з ймовірністю $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

Ймовірність того, що подія A відбудеться рівно k разів у n незалежних повторних випробуваннях позначають $P_n(k)$ і обчислюють за **формулою Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.3.1)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Нагадаємо, що тут для обчислення комбінації з n елементів по k застосовують формулу (1.1.4).

Приклад 1.3.1.

Ймовірність того, що в один день регіональне представництво Укравтодору в Київській області вкладеться в норму витрат на транспорт, дорівнює $\frac{3}{4}$. Яка ймовірність того, що лише в три дні робочого тижня воно вкладеться в норму витрат?

Розв'язання.

Один день робочого тижня можна розглядати як одне незалежне випробування, а весь робочий тиждень як послідовність $n = 5$ незалежних випробувань.

Подія A – регіональне представництво вкладеться в норму витрат на транспорт може настати з ймовірністю $p = \frac{3}{4}$, або не настати з ймовірністю

$q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ в одному незалежному випробуванні. Ймовірність того, що подія A настане рівно $k = 3$ рази в $n = 5$ незалежних випробуваннях обчислимо за формулою Бернуллі (1.3.1):

$$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3} = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5!}{2!3!} \frac{27}{4^3 \cdot 4^2} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3!} \cdot \frac{27}{4^3 \cdot 4^2} = \frac{270}{1024} \approx 0,264.$$

Для різних k ймовірності $P_n(k)$ набувають різних значень. Число k_0 , при якому ймовірність $P_n(k_0)$ найбільша, називають **найімовірнішим числом настання події A** . Його визначають співвідношенням:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (1.3.2)$$

Число k_0 завжди має бути цілим. Тому якщо границі інтервалу (1.3.2) є дробовими числами, то отримують одне значення найбільш імовірного числа k_0 . Якщо ж границі цілі числа, то мають два значення найбільш імовірного числа.

Формула Бернуллі дає точні значення ймовірностей $P_n(k)$, проте при великих значеннях n вона приводить до громіздких обчислень. Тому, якщо число n досить велике, то для обчислення ймовірності появи події A k разів у n незалежних випробуваннях застосовують наближену *формулу локальної теореми Лапласа*.

Локальна теорема Муавра-Лапласа: якщо ймовірність p настання події A в n незалежних випробуваннях стала і задовольняє нерівність $0 < p < 1$, то ймовірність того, що подія з'явиться k разів у n незалежних випробуваннях, наближено дорівнює:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (1.3.3)$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad (1.3.4)$$

Функцію $\varphi(x)$ називають функцією Гаусса. Вона парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Для функції $\varphi(x)$ складені таблиці, в яких за заданими значеннями x знаходять значення функції (див. – додатки, *табл. 1*), але лише для аргументів $0 \leq x \leq 4$. Для інших значень аргументів приймають: $\varphi(x > 4) = 0$.

Приклад 1.3.2.

У масовому виробництві автомобільних шин ймовірність браку складає 0,1. Яка ймовірність того, що серед 500 відібраних шин буде 30 бракованих?

Розв'язання. За умовою $n = 500$, $k = 30$, $p = 0,1$, $q = 1 - 0,1 = 0,9$.

Використовуючи локальну теорему Муавра-Лапласа (1.3.3), отримуємо:

$$P_{500}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \cdot \varphi(x),$$

де
$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 500 \cdot 0,1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = \frac{-20}{6,7} = -2,98.$$

За *табл. додатку 1* знаходимо: $\varphi(-2,98) = \varphi(2,98) = 0,0047$.

Тому $P_{500}(30) \approx \frac{1}{6,7} \cdot 0,0047 \approx 0,001$.

У деяких випадках необхідно обчислити ймовірність того, що у n випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$. Тоді застосовують *інтегральну теорему Лапласа*.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа: якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A стала і задовольняє нерівність $0 < p < 1$, то ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 , але не більше k_2 раз наближено дорівнює:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (1.3.5)$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad (1.3.6)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа. Вона непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Значення функції $\Phi(x)$ наведені у спеціальних таблицях (див. – додатки, табл. 2) до $x = 5$, тому для $x \geq 5$ вважають $\Phi(x) = 0,5$.

Приклад 1.3.3.

Ймовірність того, що відвідувач АЗС замовить бензин марки А-95, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 150 відвідувачів бензин А-95 замовлять не менше 75 і не більше 110 відвідувачів.

Розв’язання. За умовою $n = 150$, $k_1 = 75$, $k_2 = 110$, $p = 0,8$, $q = 0,2$.

Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$np = 150 \cdot 0,8 = 120, \quad npq = 150 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 24, \quad \sqrt{npq} = 4,89,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 120}{4,89} = -2,05, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 120}{4,89} = -9,20,$$

$$\begin{aligned} P_{150}(75 \leq k \leq 110) &= \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx \Phi(-2,05) - \Phi(-9,20) = -\Phi(2,05) + \Phi(9,20) = \\ &= -0,47982 + 0,5 = 0,02018. \end{aligned}$$

Якщо число n проведених випробувань велике ($n \geq 50$), а ймовірність появи події A в кожному випробуванні досить мала $0 < p < 0,1$, то ймовірність появи події A в цих n незалежних повторних випробуваннях k разів обчислюють за *формулою Пуассона*:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (1.3.7)$$

де $\lambda = np$ – середнє число появ події A у n випробуваннях.

Значення $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ представлені у спеціальній таблиці (див. – додатки, табл. 3).

1.4 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковою величиною називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути лише одного числового значення, яке зумовлене результатом експерименту.

Отже, **випадковою величиною**, пов'язаною з певним випробуванням, називають величину X , яка під час випробування може набувати одного і лише одного можливого числового значення, яке наперед невідоме і не залежить від випадкових причин, що попередньо не можуть бути враховані.

Між випадковими подіями і випадковими величинами є тісний зв'язок. Випадкова подія – це якісна характеристика випадкового результату випробування, а випадкова величина – його кількісна характеристика.

Випадкові величини поділяють на два типи: **дискретні** та **неперервні**.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути відокремлених, ізольованих одне від одного, числових значень з відповідними ймовірностями.

Іншими словами, вона має таку властивість, що кожне з її можливих значень має окіл, який вже не містить жодного з інших значень цієї самої величини. Всі можливі значення дискретної випадкової величини можуть бути пронумеровані: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Кількість значень дискретної випадкової величини може бути кінцевою, наприклад, число пасажирів у вагоні метро, або зчисленою, наприклад, кількість крапель дощу, що впали на дах дому за останні 50 років.

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може набувати будь-якого числового значення з певного обмеженого інтервалу (a, b) або необмеженого інтервалу $(-\infty, +\infty)$. Наприклад, випадкова величина X – час безвідмовної роботи приладу, неперервна, оскільки її можливе значення $t > 0$.

Будь-яка випадкова величина задається своїм законом розподілу. Співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими приймають ці значення, називають **законом розподілу ймовірностей випадкової величини**.

Основні форми закону розподілу:

1. Ряд розподілу (застосовується тільки для ДВВ) – таблиця, у верхньому рядку якої записують усі можливі значення випадкової величини у порядку зростання, а в нижньому – відповідні ймовірності цих значень:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Оскільки в результаті випробування випадкова величина X набуває одного і тільки одного можливого значення, то події $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ утворюють повну групу, тому:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, \quad (1.4.1)$$

тобто в ряді розподілу ДВВ завжди:

$$p_i = P(X = x_i), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Графічне зображення ряду розподілу називають **многокутником (полігоном) розподілу** (по осі абсцис відкладають можливі значення x_n випадкової величини X , а по осі ординат – ймовірності p_n цих значень; точки (x_n, p_n) послідовно з'єднують відрізками прямих).

2. Функція розподілу (універсальний закон: застосовується як для ДВВ, так і для НВВ) випадкової величини X – функція $F(x)$, що дорівнює ймовірності $P(X < x)$ того, що випадкова величина X буде менше довільно вибраного значення x .

Функцію розподілу $F(x)$ для ДВВ X обчислюють за формулою:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i. \quad (1.4.2)$$

Властивості функції розподілу:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;

3) функція $F(x)$ неспадна: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;

4) функція $F(x)$ неперервна зліва: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;

5) ймовірність потрапляння випадкової величини X в проміжок $[a, b)$, дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Для дискретних випадкових величин $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, тобто:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3; \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \leq x_n; \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

а її графік – кусково-неперервна східчаста фігура.

Графік функції $F(x)$ для НВВ – неперервна крива.

3. Щільність розподілу ймовірностей (застосовується тільки для НВВ) $f(x)$ неперервної випадкової величини X – перша похідна від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \quad (1.4.4)$$

Графік функції $f(x)$ називають **кривою розподілу НВВ**.

Властивості щільності розподілу:

1) Щільність розподілу ймовірностей є невід'ємною функцією: $f(x) \geq 0$.

2) Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (1.4.5)$$

3) Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення з інтервалу (a, b) , дорівнює визначеному інтегралу від щільності розподілу в межах від a до b :

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.4.6)$$

4) Функція розподілу ймовірностей є первісною для щільності розподілу:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (1.4.7)$$

При розв'язанні багатьох задач теорії ймовірностей немає необхідності знаходити закон розподілу випадкової величини повністю, часто виявляється достатнім визначити тільки деякі параметри цього закону, які називають числовими характеристиками. Найбільш важливими з них є: математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

1. Математичне сподівання $M(X)$ – це деяке середнє, орієнтовне значення випадкової величини, навколо якого групуються всі її можливі значення.

Математичне сподіванням ДВВ X обчислюють за формулою:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (1.4.8)$$

Математичне сподівання НВВ X зі щільністю $f(x)$ визначається формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (1.4.9)$$

2. Дисперсія $D(X)$ визначає розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Дисперсія обчислюється як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = M(X^2) - M^2(X), \quad (1.4.10)$$

де $M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$ (для дискретної випадкової величини) і $M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ (для неперервної випадкової величини).

3. Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ випадкової величини X – корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (1.4.11)$$

1.5 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математичною статистикою називають науку, яка займається розробкою методів відбору, опису та аналізу досліdnих даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ. У свою чергу, встановлення цих закономірностей ґрунтується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних – результатів дослідів або спостережень.

Сучасну математичну статистику, що базується на методах теорії ймовірностей, називають **наукою про прийняття рішень в умовах невизначеності**.

Методи математичної статистики ефективно використовують під час розв'язування багатьох наукових задач, задач щодо організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

Множину однорідних об'єктів називають **статистичною сукупністю**.

Основними поняттями математичної статистики є: генеральна сукупність, вибірка та обсяг сукупності.

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називають сукупність випадково взятих об'єктів із статистичної сукупності для дослідження.

Генеральною називають сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку. **Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної)** називають кількість об'єктів цієї сукупності.

Вибірка повинна бути репрезентативною (представницькою), тобто правильно відображати ті властивості генеральної сукупності, які вивчаються. Досліджувані явища мають бути масовими. Лише тоді статистичні дані будуть достовірними.

Вибірки бувають повторні та безповторні.

Повторною називають вибірку, за якої відібраний об'єкт повертається до генеральної сукупності перед відбором іншого об'єкта. Вибірку називають **безповторною**, якщо взятий об'єкт до генеральної сукупності не повертається. Найчастіше використовують безповторні вибірки.

Статистичні об'єкти досліджують за їх певними характеристиками або ознаками, які називають **варіантами**.

Сукупність варіант, записаних у порядку їх зростання, називають **варіаційним рядом**.

Важлива характеристика – частота появи цієї варіанти.

Нехай з генеральної сукупності зроблено вибірку об'ємом n . Значення x_1 у вибірці повторюється n_1 раз, значення x_2 – n_2 раз, ..., значення x_k – n_k раз. При цьому об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad (1.5.1)$$

Додатні числа n_i , які показують, скільки разів варіанта x_i трапляється в таблиці даних, називають **частотою появи варіанти x_i** , а відношення

частоти n_i варіанти x_i до об'єму вибірки n – **відносними частотами (частотями)**, тобто:

$$w_i = \frac{n_i}{n}. \quad (1.5.2)$$

Причому сума усіх відносних частот:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (1.5.3)$$

Статистичним рядом називають перелік варіант і відповідних їм частот або частостей. Записують статистичний ряд у вигляді таблиці. Залежність між упорядкованим рядом варіант і відповідними їм відносними частотами називають **статистичним рядом відносних частот вибірки**.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

– статистичний ряд частот.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
w_i	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\dots$	$\frac{n_k}{n}$

– статистичний ряд відносних частот.

Статистичний ряд можна зобразити графічно у вигляді **полігона** (многокутника), відкладаючи по осі абсцис елементи статистичного ряду, а по осі ординат – частоти або частості. Отримані точки з'єднують відрізками.

У випадку, коли вибірка отримана із неперервної генеральної сукупності і об'єм її великий, складають **інтервальний статистичний ряд**. В його перший рядок вписують частинні проміжки $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{k-1}, x_k)$, які беруться однакової довжини $h = x_{i+1} - x_i$. У другому рядку зазначають частоти n_i попадання елементів вибірки в розглядувані проміжки.

Для визначення кількості проміжків k використовують напівемпіричну формулу:

$$k = 1,72\sqrt[3]{n}. \quad (1.5.4)$$

Також застосовують формулу Старджеса:

$$k = 1 + \log_2 n. \quad (1.5.5)$$

Довжину проміжків знаходять за формулою:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \quad (1.5.6)$$

де $x_{\min}, x_{\max}$ – найменша та найбільша варіанта відповідно.

За початок першого інтервалу рекомендується обирати величину:

$$x_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}. \quad (1.5.7)$$

Інтервальний статистичний ряд можна графічно зобразити у вигляді гістограми.

Гістограмою частот (частостей) називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h , а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ – щільності частоти ($\frac{w_i}{h}$ – щільності частоти).

Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки, а площа гістограми частостей дорівнює одиниці.

Якщо з'єднати середини верхніх основ прямокутників відрізками прямої, то отримаємо полігон того ж розподілу.

За даними статистичного розподілу вибірки будують емпіричну функцію розподілу.

Емпіричною функцією розподілу (або функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$.

Математичне обчислення емпіричної функції розподілу записують у вигляді:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \quad (1.5.8)$$

де n – об'єм вибірки, n_x – кількість варіант, менших за x .

Оскільки відносна частота події наближається до ймовірності цієї події при збільшенні n , то вибіркова функція розподілу $F^*(x)$ наближено представляє функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності, тобто є її оцінкою:

$$F^*(x) \approx F(x).$$

Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ має такі властивості:

1. $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
2. $F^*(x)$ – зростаюча функція;
3. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ 1, & x > x_k, \end{cases}$

де x_1 – найменше значення варіанти, x_k – найбільше значення варіанти.

Приклад 1.5.1.

За заданим статистичним розподілом вибірки:

x_i	3	5	7	10	15
n_i	2	4	7	4	3

скласти емпіричну функцію розподілу.

Розв'язання:

За формулою (1.5.1) маємо об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 2 + 4 + 7 + 4 + 3 = 20.$$

Оскільки найменше значення варіанти $x_1 = 3$, то

$$F^*(x) = 0$$

для всіх $x \leq 3$.

Значення $x < 5$, а саме $x_1 = 3$, спостерігається двічі, тому згідно формули (1.5.8), маємо:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{2}{20} = 0,1$$

при $3 < x \leq 5$.

Аналогічно значення $x < 7$, а саме $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ спостерігалися $2+4=6$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{6}{20} = 0,3$$

при $5 < x \leq 7$.

Значення $x < 10$, а саме $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ спостерігалися $2+4+7=13$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{13}{20} = 0,65$$

при $7 < x \leq 10$.

Значення $x < 15$, а саме $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10$ спостерігалися $2+4+7+4=17$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{17}{20} = 0,85$$

при $10 < x \leq 15$.

Оскільки $x_5 = 15$ – найбільше значення варіанти, то

$$F^*(x) = 1$$

при $x > 15$.

Таким чином, шукана емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3; \\ 0,1 & \text{при } 3 < x \leq 5; \\ 0,3 & \text{при } 5 < x \leq 7; \\ 0,65 & \text{при } 7 < x \leq 10; \\ 0,85 & \text{при } 10 < x \leq 15; \\ 1 & \text{при } x > 15. \end{cases}$$

Як доповнення до табличних та графічних методів представлення даних ще одним важливим засобом обробки даних є обчислення їх числових характеристик. Найважливіші з них: **вибіркове середнє, дисперсія, середньо-квадратичне відхилення**.

Ці характеристики можуть бути обчислені за даними, що знаходяться у вибірці, або за даними, що входять у кінцеву генеральну сукупність.

Числові характеристики, обчислені за вибіркою або ті, що використовуються для опису даних вибірки, називають **статистиками**.

Вибірковим середнім $\bar{x}$ називають суму всіх значень вибірки, поділену на обсяг вибірки n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.5.9)$$

Вибіркове середнє дискретного статистичного ряду знаходять за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i. \quad (1.5.10)$$

Вибіркове середнє інтервального статистичного ряду вираховують за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* n_i, \quad (1.5.11)$$

де $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ – середина інтервалу $[x_i; x_{i+1})$.

Вибіркове середнє є аналогом математичного сподівання і використовується дуже часто. Воно може набувати різних числових значень при різних вибірках однакового об'єму.

Вибірковою дисперсією D^* називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень вибірки від вибіркового середнього $\bar{x}$:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (1.5.12)$$

Обчислення вибіркової дисперсії спрощується, якщо її знаходити за формулою:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x})^2. \quad (1.5.13)$$

Вибіркову дисперсію інтервального статистичного ряду вираховують на основі формули:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^{*2} n_i - (\bar{x})^2. \quad (1.5.14)$$

Вибірковим середньоквадратичним відхиленням вибірки називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії:

$$\sigma^* = \sqrt{D^*}. \quad (1.5.15)$$

При розв'язуванні практичних задач часто використовують **виправлену дисперсію (варіансу)**, яку обчислюють наступним чином:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^*. \quad (1.5.16)$$

Величину:

$$S = \sqrt{S^2} \quad (1.5.17)$$

називають **виправленим середнім квадратичним відхиленням** вибірки або **стандартом**.

Приклад 1.5.2.

Обчислити вибірконе середнє, вибірконе дисперсію, вибірконе середньоквадратичне відхилення, варіансу і стандарт вибірки, заданої статистичним розподілом частот:

x_i	-1	2	5	8	10
n_i	5	10	20	5	10

Розв'язання:

За формулою (1.5.1) маємо об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 5 + 10 + 20 + 5 + 10 = 50.$$

На основі формули (1.5.10) обчислюємо вибірконе середнє:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \frac{1}{50} (-1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 10) = \frac{255}{50} = 5,1.$$

Вибіркову дисперсію знаходимо за формулою (1.5.13):

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x})^2 = \frac{1}{50} (1 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 25 \cdot 20 + 64 \cdot 5 + 100 \cdot 10) - 5,1^2 = \frac{1865}{50} - 26,01 = 11,29.$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення вибірки на основі формули (1.5.15) у нашому випадку складає:

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{11,29} \approx 3,36.$$

Виправлену дисперсію (варіансу) обчислюємо за формулою (1.5.16):

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{50}{49} \cdot 11,29 = 11,52.$$

Тоді стандарт або виправлене середнє квадратичне відхилення вибірки дорівнює згідно з формулою (1.5.17):

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{11,52} \approx 3,39.$$

Приклад 1.5.3.

Обчислити вибіркове середнє та вибіркoву дисперсію вибірки, заданої інтервальним розподілом частот:

інтервали	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
n_i	2	8	35	40	15

Розв'язання:

За формулою (1.5.1) маємо об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 2 + 8 + 35 + 40 + 15 = 100.$$

Перетворимо заданий інтервальний статистичний розподіл вибірки на точковий, знайшовши середини частинних інтервалів:

$$x_1^* = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3;$$

$$x_3^* = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{6 + 8}{2} = 7;$$

$$x_2^* = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5;$$

$$x_4^* = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{8 + 10}{2} = 9;$$

$$x_5^* = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{10 + 12}{2} = 11.$$

Вибіркове середнє інтервального статистичного ряду вираховуємо за формулою (1.5.11):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^* n_i = \frac{1}{100} (3 \cdot 2 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 35 + 9 \cdot 40 + 11 \cdot 15) = \frac{816}{100} = 8,16.$$

Вибіркову дисперсію знаходимо на основі формули (1.5.14):

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^{*2} n_i - (\bar{x})^2 = \frac{1}{100} (9 \cdot 2 + 25 \cdot 8 + 49 \cdot 35 + 81 \cdot 40 + 121 \cdot 15) - 8,16^2 = 3,29.$$

1.6 ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

Оцінка параметра (статистична оцінка) – це випадкова величина, розрахована за вибіркою, яка дає підстави для прийняття обґрунтованих рішень щодо невідомого параметра генеральної сукупності.

Головне завдання математичної статистики в тому, щоб на підставі результатів випадкової вибірки якомога точніше оцінити значення параметрів генерального розподілу. Окреме спостереження здебільшого належить деякій гіпотетично необмеженій генеральній сукупності, що організована відповідно до певного закону, який називають **розподілом сукупності**. Кожне спостереження дає додаткову інформацію про параметри та вигляд розподілу. Зазвичай за вибіркою розраховують наближені значення (**оцінки**) таких параметрів розподілу, як математичне сподівання та дисперсія.

Задачі оцінювання можна розбити на дві великі групи: **параметричні** і **непараметричні**. Якщо відомий вигляд розподілу й область зміни параметрів, то маємо параметричну задачу. Якщо ж невідомий навіть закон розподілу, не кажучи вже про можливі значення параметрів, то задача непараметрична.

Задачі параметричного оцінювання поділяють на два типи: **відшукування точкових оцінок** і **відшукування інтервальних оцінок**. У першому випадку слід знайти, яке саме значення, розраховане за вибіркою, треба взяти за наближене значення істинної характеристики генеральної сукупності, а в другому – вказати інтервал, який із заданою ймовірністю містить це істинне значення.

Нехай вивчається випадкова величина X із законом розподілу, що залежить від одного чи кількох параметрів. Потрібно по вибірці, отриманій в результаті n спостережень, оцінити невідомий параметр θ .

Точковою статистичною оцінкою невідомої генеральної числової характеристики або параметра θ розподілу називають функцію $\tilde{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що залежить від елементів вибірки, і наближено рівна істинному значенню цього параметра θ :

$$\tilde{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \theta,$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – результати n спостережень над кількісною ознакою випадкової величини X .

Для кожної конкретної вибірки це число, тобто точка на числовій осі. Наприклад, вибіркове середнє, вибіркова дисперсія та вибіркове середньоквадратичне відхилення – точкові оцінки відповідних числових характеристик генеральної сукупності.

Точкові оцінки параметрів розподілу є випадковими величинами, їх можна вважати первинними результатами обробки вибірки тому, що невідомо, з якою точністю кожна з них оцінює відповідну числову характеристику генеральної сукупності.

Якщо об'єм вибірки доволі великий, то точкові оцінки задовольняють практичні потреби точності. Щоб статистичні оцінки давали найкращі наближення, вони повинні задовольняти певним якісним вимогам.

Основними статистичними властивостями, які описують якість оцінки числового параметра, є **незміщеність** (незсуненість), **ефективність** і **спроможність** (обґрунтованість, значущість, конзистентність). Дві перші властивості можуть справджуватися для скінченної вибірки, остання – лише за умови необмеженого збільшення обсягу вибірки.

Незміщеною називають точкову оцінку $\tilde{\theta}_n$, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру θ для будь-якого обсягу вибірки:

$$M(\tilde{\theta}) = \theta.$$

Якщо ж :

$$M(\tilde{\theta}) \neq \theta,$$

то оцінку $\tilde{\theta}_n$ називають **зміщеною**. У цьому випадку:

$$M(\tilde{\theta}) - \theta = M(\tilde{\theta} - \theta) = \delta \neq 0,$$

де величина δ – зміщення (зсув).

Вимога незміщеності особливо важлива при малій кількості спостережень. Але не завжди незміщена оцінка $\tilde{\theta}_n$ найближча до θ . Можливі значення $\tilde{\theta}_n$ можуть мати велике розсіювання. Тому від оцінки вимагається ще й властивість ефективності.

Ефективною називають таку оцінку $\tilde{\theta}_n$, яка при заданому об'ємі n має найменшу можливу дисперсію серед усіх можливих незміщених оцінок параметра θ .

Оцінку $\tilde{\theta}_n$ параметра θ називають **спроможною**, якщо вона збігається за ймовірністю до оцінюваного параметру :

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta,$$

тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$. Це означає, що із збільшенням об'єму вибірки оцінка $\tilde{\theta}_n$ наближається до істинного значення параметра θ .

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вибірка з генеральної сукупності і $M(X) = m$.

Незміщеність є наслідком того, що вибіркове середнє є незміщеною оцінкою для математичного сподівання випадкової величини, розподіл якої має генеральна сукупність:

$$\tilde{m} = \bar{x}. \quad (1.6.1)$$

Вибіркова дисперсія D^* є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії $D(X)$.

Незміщеною і спроможною оцінкою дисперсії $D(X)$ є виправлена дисперсія S^2 :

$$\tilde{D} = S^2 = \frac{n}{n-1} D^*. \quad (1.6.2)$$

Поправку $\frac{n}{n-1}$ називають **поправкою Бесселя**.

На практиці виправленою дисперсією користуються, якщо $n \leq 30$, при $n > 30$ за незміщену оцінку дисперсії можна наближено прийняти вибірку дисперсію.

Для спрощення обчислень вибіркового середнього та вибіркової дисперсії інтервального статистичного ряду використовуються формули:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{x_i^* - C}{h} n_i}{n} \cdot h + C \quad (1.6.3)$$

та

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i^* - C}{h} \right)^2 n_i}{n} \cdot h^2 - (\bar{x} - C)^2, \quad (1.6.4)$$

де h – довжина інтервалів, C – довільне число.

Якщо об'єм вибірки малий, то точкові оцінки можуть давати значні похибки, а оскільки питання точності оцінок у цьому випадку дуже важливе, то використовують інтервальні оцінки.

Інтервальною називають статистичну оцінку, що визначається двома числами, кінцями інтервалів.

Інтервальні методи оцінювання дають змогу знайти інтервал, який з певною ймовірністю містить невідоме значення параметра.

Нехай знайдена за даними вибірки статистична оцінка $\tilde{\theta}$ буде оцінкою невідомого параметра θ . Різницю між статистичною оцінкою $\tilde{\theta}$ та її оцінювальним параметром θ , взяту за абсолютним значенням, називають **точністю оцінки**, а саме:

$$|\tilde{\theta} - \theta| < \delta, \quad (1.6.5)$$

де δ – точність оцінки.

Оскільки $\tilde{\theta}$ є випадковою величиною, то і δ буде випадковою, тому нерівність (1.6.5) справджуватиметься з певною ймовірністю.

Імовірність, з якою береться нерівність (1.6.5), тобто:

$$P(|\tilde{\theta} - \theta| < \delta) = \gamma, \quad (1.6.6)$$

називають **надійністю оцінки (надійною ймовірністю)**.

Рівність (6.6) можна записати так:

$$P(\tilde{\theta} - \delta < \theta < \tilde{\theta} + \delta) = \gamma. \quad (1.6.7)$$

Величина γ вибирається наперед, в основному γ приймають рівною 0,9; 0,95; 0,99 тощо, залежно від обставин.

Інтервал $[\tilde{\theta} - \delta; \tilde{\theta} + \delta]$, що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності з заданою надійністю γ , називають **довірчим**. Цей інтервал випадковий, бо його межі залежать від випадкової величини $\tilde{\theta}$.

Збільшення довірчої ймовірності веде до зниження точності оцінки параметра, тобто до збільшення довірчого інтервалу. Отже, що точніша оцінка, то менший рівень її надійності, і навпаки, для збільшення надійності потрібно збільшувати довірчий інтервал, тобто знижувати точність оцінки.

Нехай задано генеральну сукупність з нормальним розподілом $X \in N(m, \sigma)$, де σ відоме, надійність γ задана.

Довірчий інтервал для математичного сподівання m при відомому середньому вквadraticному відхиленні σ знаходять за формулою:

$$\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right). \quad (1.6.8)$$

Тут n – об'єм вибірки ($n > 30$), а значення t обчислюють за формулою $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ з таблиці значень функції Лапласа (див. додаток *табл. 2*).

Зі збільшенням обсягу n вибірки число $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ зменшується, тобто точність оцінки підвищується. Зростання надійності $\gamma = 2\Phi(t)$ веде до збільшення t , отже, до зростання δ , або до зниження точності.

Довірчий інтервал математичного сподівання m при невідомому середньому вквadraticному відхиленні знаходять за формулою:

$$\left(\bar{x} - t_{\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x} + t_{\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} \right). \quad (1.6.9)$$

Тут S – виправлене середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , обчислене за вибіркою; n – об'єм вибірки ($n < 30$), t_{γ} – величина з розподілом Стюдента (беруть з *табл. 4* додатків за значеннями γ та n).

Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу знаходять за формулами:

$$(S(1-q); S(1+q)) \quad (1.6.10)$$

при $q < 1$

та

$$(0; S(1+q)) \quad (1.6.11)$$

при $q > 1$.

У свою чергу q знаходять за таблицею значень $q = q(\gamma, n)$ χ^2 -розподілу (див. – додатки, табл.5)

Розглянуту оцінку середньоквадратичного відхилення використовують в якості оцінки точності вимірювань.

Приклад 1.6.1.

Виконано 10 вимірів одним приладом без систематичних похибок деякої фізичної величини. виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових похибок вимірів виявилось рівне $S = 0,5$. Вважаючи результати вимірів розподіленими нормально, знайти точність приладу з надійністю $\gamma = 0,95$.

Розв'язання.

Знаходимо q з табл. 5 додатків: $q = q(\gamma, n) = q(0,95; 10) = 0,65$.

Оскільки $q < 1$, то інтервал для σ визначимо за формулою (1.6.10):

$$(0,5(1-0,65); 0,5(1+0,65))$$

або

$$(0,325; 0,825).$$

Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових похибок вимірів. Отже, надійний інтервал, який покриває σ із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, складає: $(0,325; 0,825)$.

2 ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ЗАВДАННЯ №1

Класичне означення ймовірності та елементи комбінаторики

Серед виробів a дефектних і b якісних. Для контролю навмання вибирають c виробів. Яка ймовірність того, що серед них: а) d якісних виробів; б) менше d якісних виробів; в) принаймні один якісний виріб?

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7	8	6	4	8	5
b	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4	6	5	6	6	6
c	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
d	3	2	3	2	2	3	4	2	3	3	3	3	3	2	4

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	7	5	6	5	6	6	6	6	6	5	6	5	6	6	4
b	4	7	5	7	7	8	5	8	7	7	7	7	8	7	7
c	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	6	5	5	5	4
d	3	3	2	3	3	4	4	3	3	2	3	3	3	2	2

ЗАВДАННЯ №2

Теореми додавання та множення ймовірностей

Автоперевізник забов'язався вчасно доставити на підприємство сировину від 4-х різних постачальників. Ймовірності вчасної доставки сировини від кожного з них відповідно дорівнюють a ; b ; c та d . Знайти ймовірності того, що вчасно прибудуть: а) k партій сировини; б) хоча б одна партія; в) всі партії.

Варіант	a	b	c	d	k
1	0,61	0,71	0,81	0,91	1
2	0,62	0,72	0,82	0,92	2
3	0,63	0,73	0,83	0,93	3
4	0,64	0,74	0,84	0,94	1
5	0,65	0,75	0,85	0,95	2
6	0,66	0,76	0,86	0,96	3
7	0,67	0,77	0,87	0,97	1
8	0,68	0,78	0,88	0,98	2
9	0,69	0,79	0,89	0,99	3
10	0,61	0,72	0,83	0,94	1
11	0,91	0,81	0,71	0,61	2
12	0,92	0,82	0,72	0,62	3
13	0,93	0,83	0,73	0,63	1
14	0,94	0,84	0,74	0,64	2
15	0,95	0,85	0,75	0,65	3

Варіант	a	b	c	d	k
16	0,96	0,86	0,76	0,66	1
17	0,97	0,87	0,77	0,67	2
18	0,98	0,88	0,78	0,68	3
19	0,99	0,89	0,79	0,69	1
20	0,91	0,82	0,73	0,64	2
21	0,81	0,71	0,81	0,91	3
22	0,82	0,72	0,82	0,92	1
23	0,83	0,73	0,83	0,93	2
24	0,84	0,74	0,84	0,94	3
25	0,85	0,75	0,85	0,95	1
26	0,86	0,76	0,86	0,66	2
27	0,87	0,77	0,87	0,67	3
28	0,88	0,78	0,88	0,68	1
29	0,89	0,79	0,89	0,69	2
30	0,81	0,72	0,83	0,64	3

ЗАВДАННЯ №3

Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Завод виготовляє автозапчастини у обсязі: перша лінія 35% всіх запчастин, друга – 20%, а решту – третя. Брак в їхній продукції складає відповідно $a\%$, $b\%$, $c\%$. Відділ контролю якості перевіряє на дотримання стандартів випадково вибрану автозапчастину. Знайти ймовірність того, що вона виявиться бракованою. Якою з ліній вона найімовірніше виготовлена?

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>a</i>	3	2	4	3	8	9	2	7	1	4	6	9	2	3	1
<i>b</i>	5	6	2	1	6	3	3	5	3	5	3	7	7	8	6
<i>c</i>	8	1	7	5	4	5	6	3	5	7	8	6	5	4	4
Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
<i>a</i>	3	7	6	4	1	5	6	4	5	3	5	2	1	5	1
<i>b</i>	6	3	3	7	6	9	8	6	2	2	4	6	8	3	4
<i>c</i>	4	5	2	6	4	8	3	4	7	6	7	8	3	6	7

ЗАВДАННЯ №4

Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі.

Магазин з продажу автозапчастин обслуговує n СТО, від кожної з яких заявка на наступний день може надійти з ймовірністю p . Знайти: а) найімовірніше число k_0 заявок, що надійдуть наступного дня; б) ймовірність отримання магазином числа k_0 заявок.

Варіант	n	p
1	11	0,75
2	12	0,62
3	13	0,45
4	14	0,52
5	15	0,65
6	16	0,55
7	17	0,12
8	18	0,45
9	19	0,35
10	20	0,25
11	19	0,3
12	18	0,17
13	17	0,32
14	16	0,23
15	15	0,6

Варіант	n	p
16	14	0,65
17	13	0,83
18	12	0,34
19	11	0,78
20	10	0,64
21	9	0,91
22	11	0,82
23	12	0,76
24	13	0,12
25	14	0,22
26	15	0,47
27	16	0,63
28	17	0,28
29	18	0,43
30	19	0,24

ЗАВДАННЯ №5

Теореми Муавра-Лапласа

За результатами перевірок податковою інспекцією встановлено, що в середньому одне мале підприємство з чотирьох має порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що з $500 + v$ зареєстрованих у регіоні малих підприємств мають порушення фінансової дисципліни: а) $100 + v$ підприємств; б) від $120 + v$ до $300 - v$ підприємств, де v – номер варіанта.

ЗАВДАННЯ №6

Масові малоймовірні події. Формула Пуассона

Система бронювання та продажу авіаційних квитків має n периферійних пультів, від кожного з яких в даний момент часу може надійти заявка з ймовірністю p . Знайти ймовірність того, що в даний момент часу надійде: а) m заявок; б) не менше ніж a і не більше b заявок; в) жодна заявка не надійде.

Варіант	n	p	m	a	b
1	100	0,001	1	1	3
2	100	0,002	2	1	4
3	300	0,001	3	2	4
4	200	0,002	4	3	5
5	100	0,005	5	2	4
6	200	0,003	6	3	5
7	700	0,001	1	2	4
8	400	0,002	2	3	6
9	100	0,009	3	2	5
10	100	0,01	4	3	6
11	100	0,02	5	2	7
12	300	0,01	6	10	12
13	200	0,02	7	4	8
14	100	0,05	8	9	11
15	200	0,03	9	1	5

Варіант	n	p	m	a	b
16	200	0,03	10	2	7
17	700	0,01	11	5	9
18	400	0,02	12	11	14
19	100	0,09	13	9	12
20	1000	0,001	5	3	6
21	2000	0,001	7	4	8
22	1500	0,002	9	5	10
23	2000	0,002	11	3	8
24	1000	0,005	13	10	13
25	2000	0,003	15	12	16
26	1000	0,007	17	8	11
27	2000	0,004	19	7	10
28	4500	0,002	20	15	19
29	200	0,001	2	1	4
30	100	0,003	3	2	5

ЗАВДАННЯ №7

Дискретні випадкові величини

Випадкову величину X задано рядом розподілу, де n – номер варіанта:

X	$n-5$	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
P	0,1	p_2	0,2	0,3	0,2	0,1

Визначити невідому ймовірність p_2 . Записати функцію розподілу ймовірностей $F(x)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

ЗАВДАННЯ №8

Неперервні випадкові величини

Неперервну випадкову величину X задано функцією $F(x)$ розподілу.

а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;

в) визначити двома способами (за функціями $f(x)$ і $F(x)$) ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу (a, b) :

$$\mathbf{1 - варіант:} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 7, \\ (x-7)^2, & \text{при } 7 < x \leq 8, \\ 1, & \text{при } x > 8; \end{cases} \quad a = 5, \quad b = 7,5.$$

$$\mathbf{2 - варіант:} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -4, \\ \frac{x+4}{7}, & \text{при } -4 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 1.$$

$$\mathbf{3 - варіант:} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = -1,5, \quad b = 2.$$

$$\mathbf{4 - варіант:} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$\mathbf{5 - варіант:} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^2}{25}, & \text{при } -2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 0, b = 2.$$

$$\mathbf{6 - варіант:} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{(x+3)^2}{9}, & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad a = -2, b = -1.$$

$$\mathbf{7 - варіант:} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x^3, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad a = 0,5, \quad b = 1.$$

$$\mathbf{8 - \text{варіант:}} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 5, \\ \frac{(x-5)^2}{4}, & \text{при } 5 < x \leq 7, \\ 1, & \text{при } x > 7; \end{cases} \quad a = 6, \quad b = 7.$$

$$\mathbf{9 - \text{варіант:}} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 3x)}{18}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 1, \quad b = 2.$$

$$\mathbf{10 - \text{варіант:}} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{25}, & \text{при } -1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4; \end{cases} \quad a = 1, b = 3.$$

$$\mathbf{11 - \text{варіант:}} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^2}{16}, & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\mathbf{12 - \text{варіант:}} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 2x)}{8}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 1, \quad b = 2.$$

$$\mathbf{13 - \text{варіант:}} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 5, \\ \frac{(x-5)^2}{4}, & \text{при } 5 < x \leq 7, \\ 1, & \text{при } x > 7; \end{cases} \quad a = 5, b = 6.$$

$$\mathbf{14 - \text{варіант:}} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{(x-2)^2}{16}, & \text{при } 2 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при } x > 6; \end{cases} \quad a = 3, b = 5.$$

$$\text{15 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{(x+3)^2}{25}, & \text{при } -3 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = -1, b = 1.$$

$$\text{16 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 3x)}{18}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$\text{17 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 2x)}{8}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{18 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ \frac{(x-4)^2}{16}, & \text{при } 4 < x \leq 8, \\ 1, & \text{при } x > 8; \end{cases} \quad a = 5, b = 7.$$

$$\text{19 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 2x)}{15}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$\text{20 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases} \quad a = 2, \quad b = 3.$$

$$\text{21 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ (2x-4)^2, & \text{при } 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{5}{2}; \end{cases} \quad a = 2, b = 2, 2.$$

$$\text{22 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ 0,5(x^2 - x), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 1, b = 1,5.$$

$$23 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{9}, & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$24 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 5, \\ (x-5)^2, & \text{при } 5 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при } x > 6; \end{cases} \quad a = 2, \quad b = 4, 5.$$

$$25 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x^2, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 0, 5.$$

$$26 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$27 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 3x^2 + 2x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3}; \end{cases} \quad a = 0, b = 0, 25.$$

$$28 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 8, \\ (x-8)^2, & \text{при } 8 < x \leq 9, \\ 1, & \text{при } x > 9; \end{cases} \quad a = 7, \quad b = 8, 5.$$

$$29 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(2x^2 + x)}{10}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$30 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + x)}{6}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

ЗАВДАННЯ №9

Неперервні випадкові величини

Випадкову величину X задано щільністю ймовірності $f(x)$. Знайти функцію $F(x)$ розподілу випадкової величини X .

$$\mathbf{1-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{5}{2}, \\ 4(2x-5), & \frac{5}{2} < x \leq 3, \\ 0, & x > 3; \end{cases}$$

$$\mathbf{2-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{2}{3}, \\ 6(3x-2), & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\mathbf{3-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 18(x-1), & 1 < x \leq \frac{4}{3}, \\ 0, & x > \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\mathbf{4-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$\mathbf{5-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 8(x-2), & 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 0, & x > \frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$\mathbf{6-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ 4(2x+1), & -\frac{1}{2} < x \leq 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{7-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$\mathbf{8-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\mathbf{9-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 2(x-3), & 3 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4; \end{cases}$$

$$\mathbf{10-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2x, & 2 < x \leq 6, \\ 0, & x > 6; \end{cases}$$

$$\mathbf{11-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 8(x-1), & 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & x > \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\mathbf{12-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 16(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & x > \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$\mathbf{13-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,25, \\ 8(4x-1), & 0,25 < x \leq 0,5, \\ 0, & x > 0,5; \end{cases}$$

$$\mathbf{14-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$15\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{6}{5}(x^2 + x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$16\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(1 - x^2), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$17\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{3}{32}(4 - x^2), & -2 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$18\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ -\frac{3}{4}(x^2 - 1), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$19\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{7}{12}(1 - x^6), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$20\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$$

$$21\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$22\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 6(x - x^2), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$23\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{3}{4}(2x - x^2), & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$24\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ -6(x^2 + x), & -1 < x \leq 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$25\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{1}{6}(x^2 - 2), & -3 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3; \end{cases}$$

$$26\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{3}{4}(x^2 - 2x), & -2 < x \leq 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$27\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 6(3x - x^2 - 2), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$28\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ -\frac{1}{2}(x - 1), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$29\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2}{9}x, & 0 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3; \end{cases}$$

$$30\text{-В. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ №10

Елементи математичної статистики

В результаті вибіркового аналізу добової виручки (*тис. грн*) на маршруті №1 автоперевізником отримано вибірку обсягу n . За поданими нижче вибірковими даними для кількісної ознаки X —добової виручки на маршруті №1:

1) Скласти дискретний статистичний розподіл вибірки. За отриманим розподілом знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$, побудувати її графік.

2) Скласти інтервальний статистичний розподіл вибірки. За отриманим розподілом побудувати гістограму відносних частот.

3) Знайти точкові незміщені оцінки генеральних параметрів ознаки X – математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

4) Припускаючи нормальний розподіл випадкової величини знайти з заданою надійністю γ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання при відомому σ .

Варіант 1		$(n=32; \gamma=0,999; \sigma=11,5)$							
20	30	25	45	35	60	65	55	45	35
40	55	50	45	50	35	50	65	30	35
45	25	40	55	40	45	30	40	50	45
60	65								

Варіант 2		$(n=30; \gamma=0,95; \sigma=42)$							
37	8	88	103	25	71	37	121	132	103
121	71	132	148	88	56	71	103	8	25
132	121	103	37	71	121	37	25	121	103

Варіант 3		$(n=40; \gamma=0,999; \sigma=1,5)$							
20,2	20,4	20,8	19,5	21,0	21,0	21,8	20,4	21,8	20,2
19,4	19,4	20,2	21,4	20,2	19,5	19,0	21,4	20,2	19,0
20,4	21,2	18,8	20,4	21,2	20,2	20,0	20,4	20,4	20,0
21,2	20,0	20,8	19,5	19,0	20,8	19,4	21,0	20,0	21,4

Варіант 4		$(n=40; \gamma=0,95; \sigma=1,3)$							
6,5	7	6	8	7,5	6,5	6	8	5,5	8,5
9	7,5	7	6	7	6,5	7,5	7	6,5	10
9,5	8	8,5	6,5	7	7,5	5,5	6	6	8,5
7	11	8	8,5	8	7,5	7	6,5	7	7,5

Варіант 5		$(n=50; \gamma=0,999; \sigma=8,7)$							
30	28	52	24	35	32	40	24	32	28
32	40	28	35	52	22	32	15	40	24
24	24	10	28	24	40	32	28	35	30
32	35	44	30	40	30	17	40	30	32
28	17	32	47	35	32	40	32	22	42

Варіант 6		$(n=30; \gamma=0,95; \sigma=2,5)$							
51	52	51	55	54	56	53	54	56	58
55	57	60	53	55	58	54	50	59	53
54	56	57	53	58	55	59	56	55	54

Варіант 7		(n=32; $\gamma=0,999$; $\sigma=7$)							
12	15	7	19	15	27	22	4		
11	19	15	7	1	12	22	4		
11	15	19	12	7	27	15	19		
11	22	12	19	15	12	15	31		

Варіант 8		(n=30; $\gamma=0,99$; $\sigma=2,6$)							
32	35	36	31	37	34	40	33	39	32
33	36	37	34	38	35	30	34	33	31
35	38	36	42	32	34	36	33	35	34

Варіант 9		(n=40; $\gamma=0,95$; $\sigma=22$)							
70	86	81	89	76	86	73	89	84	91
84	89	86	81	78	78	91	81	94	81
100	76	94	89	86	89	84	94	86	86
78	100	84	84	89	81	70	89	78	84

Варіант 10		(n=32; $\gamma=0,99$; $\sigma=6$)								
90	95	75	82	87	93	79	81			
89	96	93	88	85	89	91	78			
79	85	94	92	89	87	90	85			
75	77	81	80	92	87	88	78			

Варіант 11		(n=30; $\gamma=0,95$; $\sigma=11,5$)							
65	25	20	35	35	25	45	55	60	20
50	50	55	50	35	45	30	65	35	40
30	40	25	40	45	55	50	40	45	45

Варіант 12		(n=30; $\gamma=0,99$; $\sigma=42$)							
8	25	37	37	71	88	103	103	121	132
71	88	121	71	56	132	148	25	103	8
121	71	132	37	121	103	37	103	25	121

Варіант 13		(n=32; $\gamma=0,99$; $\sigma=6$; $\alpha=0,02$)								
93	90	95	75	87	79	82	81			
85	88	78	96	89	93	89	91			
92	90	94	79	89	85	87	85			
88	87	92	75	81	77	80	78			

Варіант 14		(n=40; $\gamma=0,95$; $\sigma=1,3$)							
5,5	6	6	6,5	6,5	7	7,5	8	8	8,5
10	9	7,5	7,5	7	7	7	6,5	6,5	6
5,5	6	6	6,5	7	7,5	8	8,5	8,5	9,5
11	8,5	8	8	7,5	7,5	7	7	7	6,5

Варіант 15		(n=50; $\gamma=0,999$; $\sigma=8,7$)							
24	32	28	28	30	32	24	35	40	52
52	40	32	35	32	40	28	24	22	15
10	24	28	24	28	24	30	32	35	40
44	30	40	35	32	32	30	40	30	17
17	22	28	32	47	32	35	40	42	32

Варіант 16		(n=30; $\gamma=0,95$; $\sigma=2,5$)							
51	51	52	53	54	54	55	56	56	58
60	59	58	57	55	55	54	53	53	50
53	54	54	55	55	56	56	57	58	59

Варіант 17		(n=36; $\gamma=0,999$; $\sigma=7$)							
4	7	12	15	15	19	22	27	4	
22	19	15	12	11	7	4	1	27	
7	11	12	15	15	19	19	27	31	
31	22	19	15	15	12	12	11	4	

Варіант 18		(n=30; $\gamma=0,99$; $\sigma=2,6$)							
34	32	32	33	34	35	35	36	37	39
38	37	36	35	34	34	33	33	31	30
32	33	31	34	35	35	42	36	38	42

Варіант 19		(n=40; $\gamma=0,95$; $\sigma=22$)							
91	89	89	86	86	76	81	84	73	70
78	81	78	81	81	89	86	84	91	94
100	94	94	89	89	86	86	86	84	76
84	89	78	81	70	84	84	89	100	78

Варіант 20		(n=32; $\gamma=0,99$; $\sigma=6$)							
75	79	81	82	87	90	93	95		
96	93	91	89	89	88	85	78		
79	85	85	87	89	90	92	94		
92	88	87	81	80	78	77	75		

Варіант 21		(n=32; $\gamma=0,95$; $\sigma=11,5$)							
20	25	30	25	35	45	45	65	60	65
65	55	50	50	50	45	40	35	35	30
45	30	40	55	40	45	25	45	50	40

Варіант 22		(n=30; $\gamma=0,99$; $\sigma=42$)							
132	121	103	37	88	71	103	37	25	8
148	25	56	8	71	88	103	121	71	132
37	121	132	121	37	103	71	103	121	25

Варіант 23		(n=40; $\gamma=0,99$; $\sigma=1,5$)							
21,8	21,8	21	19,5	20,8	20,4	20,4	20,2	20,2	21
19	19	19,4	21,4	19,5	20,2	20,2	20,2	21,4	19,4
21,2	21,2	20,4	18,8	20,4	20,4	20,2	20	20	20,4
19	19,4	19,5	21,4	20	20,8	20,8	21	21,2	20

Варіант 24		(n=40; $\gamma=0,95$; $\sigma=1,3$)							
8	8	7,5	7	8,5	5,5	6,5	6,5	6	6
6,5	6,5	7	7	6	10	7	7,5	7,5	9
8,5	8,5	8	7,5	9,5	5,5	7	6,5	6	6
7	7	7	7,5	6,5	11	7,5	8	8	8,5

Варіант 25		(n=50; $\gamma=0,999$; $\sigma=8,7$)							
40	35	32	52	24	32	30	24	28	28
22	24	28	15	52	32	32	40	35	40
35	32	24	40	10	28	28	24	30	24
30	30	30	17	44	32	32	40	35	40
42	40	35	47	17	32	32	22	32	28

Варіант 26		(n=30; $\gamma=0,95$; $\sigma=2,5$)							
56	55	58	51	54	51	56	54	53	52
53	54	50	60	55	50	53	55	57	58
57	56	59	53	56	54	58	55	55	54

Варіант 27			(n=32; $\gamma=0,999$; $\sigma=7$)				
22	19	27	4	1	15	12	7
4	7	1	22	11	12	15	19
19	19	27	7	15	11	12	11
12	4	11	31	15	7	19	22

Варіант 28		(n=30; $\gamma=0,99$; $\sigma=2,6$)							
37	35	39	42	35	32	34	33	32	36
31	33	30	38	34	37	34	35	36	33
38	36	42	32	35	33	35	34	34	36

Варіант 29		(n=40; $\gamma=0,95$; $\sigma=22$)					
73	76	81	84	86	86	89	89
91	89	86	84	81	81	81	78
70	94	76	100	91	78	100	70
84	86	86	86	89	89	94	94
89	89	84	84	84	81	78	78

Варіант 30		(n=32; $\gamma=0,99$; $\sigma=6$)					
93	90	95	75	87	79	82	81
85	88	78	96	89	93	89	91
92	90	94	79	89	85	87	85
88	87	92	75	81	77	80	78

3. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ЗАВДАННЯ №1

Серед виробів 7 дефектних і 5 якісних. Для контролю навмання вибирають 4 вироби. Яка ймовірність того, що серед них: а) 2 якісних вироби; б) менше 2-х якісних виробів; в) принаймні один якісний виріб?

Розв'язання.

а) Позначимо: Подія A – серед вибраних виробів 2 якісні. Це означає, що серед вибраних виробів 2 якісні і 2 дефектні. За класичним означенням ймовірності (формулою 1.1.1):

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Кількість усіх можливих наслідків випробування за формулою (1.1.4):

$$n = C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8!} = 495.$$

Число $m(A)$ наслідків, які сприяють події A , знайдемо, скориставшись правилом добутку із комбінаторики:

$$m(A) = C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 210.$$

$$\text{Тоді } P(A) = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}.$$

б) Позначимо: Подія B – серед вибраних виробів менше 2-х якісних.

Тоді $B = B_0 + B_1$,

де B_0 – серед вибраних виробів жодного якісного (всі 4 вироби дефектні), подія B_1 – серед вибраних виробів тільки 1 якісний і 3 дефектні.

Тоді B_0 і B_1 несумісні події, тому за теоремою додавання ймовірностей (1.2.1):

$$P(B) = P(B_0 + B_1) = P(B_0) + P(B_1).$$

$P(B_0)$ та $P(B_1)$ обчислюємо за класичним означенням ймовірності (1.1.1):

$$P(B_0) = \frac{m(B_0)}{n}, \quad m(B_0) = C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35, \quad P(B_0) = \frac{35}{495} = \frac{7}{99},$$

$$P(B_1) = \frac{m(B_1)}{n}, \quad m(B_1) = C_5^1 \cdot C_7^3 = 5 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 5 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 175, \quad P(B_1) = \frac{175}{495} = \frac{35}{99}.$$

$$\text{Тоді } P(B) = \frac{35}{495} + \frac{175}{495} = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}.$$

в) Позначимо: Подія D – серед вибраних виробів принаймні 1 якісний. Перейдемо до протилежної події $\bar{D}$ – серед вибраних виробів жодного якісного. Отже, $\bar{D} = B_0$, тому $P(\bar{D}) = P(B_0) = \frac{7}{99}$.

Тоді за формулою (1.2.9):

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99}.$$

ЗАВДАННЯ №2

Автоперевізник забов'язався вчасно доставити на підприємство сировину від чотирьох різних постачальників. Ймовірності вчасної доставки сировини від кожного з постачальників відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8 та 0,9. Знайти ймовірності того, що вчасно прибудуть: а) одна партія сировини; б) хоча б одна партія сировини; в) всі партії.

Розв'язання.

а) Подію A – вчасне прибуття однієї партії сировини можна описати за допомогою подій:

A_1 – вчасне прибуття сировини від 1-го постачальника;

A_2 – вчасне прибуття сировини від 2-го постачальника;

A_3 – вчасне прибуття сировини від 3-го постачальника;

A_4 – вчасне прибуття сировини від 4-го постачальника,

та протилежних до них подій:

$\bar{A}_1$ – запізнення сировини від 1-го постачальника;

$\bar{A}_2$ – запізнення сировини від 2-го постачальника;

$\bar{A}_3$ – запізнення сировини від 3-го постачальника;

$\bar{A}_4$ – запізнення сировини від 4-го постачальника:

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4.$$

Ймовірності подій A_1, A_2, A_3, A_4 відомі за умовою задачі:

$$P(A_1) = 0,6; \quad P(A_2) = 0,7; \quad P(A_3) = 0,8; \quad P(A_4) = 0,9.$$

Ймовірності протилежних подій легко обчислити:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,6 = 0,4; \quad P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0,8 = 0,2; \quad P(\bar{A}_4) = 1 - P(A_4) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Отже, шукана ймовірність:

$$P(A) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4)$$

Події

$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$ - вчасне прибуття тільки 1-ї партії сировини,

$\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4$ - вчасне прибуття тільки 2-ї партії сировини,

$\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4$ - вчасне прибуття тільки 3-ї партії сировини,

$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$ - вчасне прибуття тільки 4-ї партії сировини

попарно несумісні, оскільки, ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно. Тому за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій (1.2.1):

$$P(A) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4).$$

Проаналізуємо перший доданок формули – $P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$. Події $A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ незалежні - ймовірність появи однієї з них не впливає на ймовірності появи чи не появи інших трьох, тому, за теоремами множення ймовірностей для незалежних подій (1.2.5):

$$P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4).$$

Аналогічно міркуємо щодо ймовірностей подій інших трьох доданків, тому, остаточно маємо:

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = \\ = 0,0036 + 0,0056 + 0,0096 + 0,0216 \approx 0,04.$$

б) Подія B – вчасне прибуття хоча б однієї партії сировини.

Подія B протилежна до події $\bar{B}$ – жодна з партій не прибула вчасно. Згідно з теоремою про ймовірність появи хоча б однієї із подій незалежних у сукупності (1.2.9):

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot P(\bar{A}_4) = \\ = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 1 - 0,0024 = 0,9976.$$

в) Подія C – вчасне прибуття всіх партій сировини за формулою (1.2.5):

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,3024.$$

ЗАВДАННЯ №3

Завод виготовляє автозапчастини у обсязі: перша лінія 30% всіх запчастин, друга – 45%, а решту – третя. Брак в їхній продукції складає відповідно 1%, 2%, 3%. Відділ контролю якості перевіряє на дотримання стандартів випадково вибрану автозапчастину. Знайти ймовірність того, що вона виявиться бракованою. Якою з ліній вона найімовірніше виготовлена?

Розв'язання.

а) Стосовно можливості появи події A – автозапчастина виявиться бракованою висловимо гіпотези:

H_1 – деталь виготовлено першою лінією;

H_2 – деталь виготовлено другою лінією;

H_3 – деталь виготовлено третьою лінією.

Обчислимо апіорні ймовірності гіпотез (ймовірності гіпотез, обчислені до настання події A). Оскільки перша лінія виготовляє 30% усіх автозапчастин, друга лінія – 35%, третя – решту (тобто 25%), то :

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0,3; \quad P(H_2) = \frac{45}{100} = 0,45; \quad P(H_3) = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Оскільки гіпотези попарно несумісні і утворюють повну групу, сума їх ймовірностей має дорівнювати одиниці:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0,3 + 0,45 + 0,25 = 1.$$

Обчислимо умовні ймовірності появи події A :

$P_{H_1}(A) = \frac{1}{100} = 0,01$ – ймовірність появи бракованої деталі (події A) за умови, що її виготовлено 1-ю лінією (гіпотеза H_1).

$P_{H_2}(A) = \frac{2}{100} = 0,02$ – ймовірність появи бракованої деталі (події A) за умови, що її виготовлено 2-ю лінією (гіпотеза H_2).

$P_{H_3}(A) = \frac{3}{100} = 0,03$ – ймовірність появи бракованої деталі (події A) за умови, що її виготовлено 3-ю лінією (гіпотеза H_3).

Ймовірність появи події A обчислимо за формулою повної ймовірності (1.2.10):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = \\ &= 0,3 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,03 = 0,003 + 0,009 + 0,0075 = 0,0195. \end{aligned}$$

б) Нехай подія A відбулася – автозапчастина виявилася бракованою. Щоб визначити якою з ліній найімовірніше вона була виготовлена обчислимо апостеріорні ймовірності гіпотез (умовні ймовірності гіпотез, обчислені після настання події A) за формулами Байєса (1.2.11):

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,003}{0,0195} \approx 0,15;$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,009}{0,0195} = 0,46;$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,0075}{0,0195} \approx 0,39.$$

Сума ймовірностей апостеріорних гіпотез також має дорівнювати одиниці: $P_A(H_1) + P_A(H_2) + P_A(H_3) = 0,15 + 0,46 + 0,39 = 1$.

Оскільки гіпотеза $P_A(H_3)$ має найбільшу ймовірність, то найімовірніше бракована автозапчастина була виготовлена третьою лінією.

ЗАВДАННЯ №4

Магазин з продажу автозапчастин обслуговує 10 СТО, від кожної з яких заявка на наступний день може надійти з ймовірністю 0,4. Знайти: а) найімовірніше число k_0 заявок, що надійдуть наступного дня; б) ймовірність отримання магазином числа k_0 заявок.

Розв'язання.

Маємо схему Бернуллі. Подія A (успіх) – отримання заявки від СТО. Ймовірність успіху: $p = P(A) = 0,4$ – за умовою. Тоді ймовірність протилежної події $\bar{A}$ (невдачі): $q = P(\bar{A}) = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$. Кількість випробувань $n = 10$.

а) Найімовірніше число k_0 заявок, що надійдуть наступного дня знаходимо зі співвідношення (1.3.2):

$$\begin{aligned} np - q &\leq k_0 \leq np + p, \\ 10 \cdot 0,4 - 0,6 &\leq k_0 \leq 10 \cdot 0,4 + 0,4, \\ 3,4 &\leq k_0 \leq 4,4. \end{aligned}$$

Оскільки границі інтервалу (1.3.2) у нашому випадку є дробовими числами, то маємо одне значення найбільш імовірного числа $k_0 = 4$.

б) Ймовірність отримання чотирьох заявок із десяти обчислимо за формулою Бернуллі (1.3.1):

$$\begin{aligned} P_n(k) &= C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \\ P_{10}(4) &= C_{10}^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^6 = \frac{10!}{4!6!} \cdot 0,0256 \cdot 0,0467 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,01156 \approx 0,251 \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ №5

За результатами перевірок податковою інспекцією встановлено, що в середньому одне мале підприємство з чотирьох має порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що з 550-ти зареєстрованих у регіоні малих підприємств мають порушення фінансової дисципліни: а) 100 підприємств; б) від 170 до 250 підприємств.

Розв'язання.

а) За умовою $n = 550$, $k = 100$, $p = \frac{1}{4} = 0,25$, $q = 1 - 0,25 = 0,75$.

Використовуючи локальну теорему Муавра-Лапласа (1.3.3), отримуємо:

$$P_{550}(100) \approx \frac{1}{\sqrt{550 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot \varphi(x),$$

де згідно (1.3.4):

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 550 \cdot 0,25}{\sqrt{550 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx \frac{-37,5}{10,2} \approx -3,67.$$

За табл. 1 додатку знаходимо: $\varphi(-3,67) = \varphi(3,67) = 0,0005$.

Тому $P_{550}(100) \approx \frac{1}{10,16} \cdot 0,0005 \approx 0,00005$.

б) За умовою $n = 550$, $k_1 = 170$, $k_2 = 250$, $p = \frac{1}{4} = 0,25$, $q = 1 - 0,25 = 0,75$.

Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа (1.3.5):

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де згідно (1.3.6):

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{170 - 550 \cdot 0,25}{\sqrt{550 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{32,5}{10,16} \approx 3,20;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{250 - 550 \cdot 0,25}{\sqrt{550 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{112,5}{10,16} \approx 11,07;$$

$$P_{550}(170 \leq k \leq 250) \approx \Phi(11,07) - \Phi(3,20).$$

При $x \geq 5$ маємо $\Phi(x) = 0,5$, а за табл. 2 додатку знаходимо: $\Phi(3,20) = 0,49931$.
Отже,

$$P_{550}(170 \leq k \leq 250) \approx 0,5 - 0,49931 = 0,00069.$$

ЗАВДАННЯ №6

Система бронювання та продажу авіаційних квитків має 1000 периферійних пультів, від кожного з яких в даний момент часу може надійти заявка з ймовірністю 0,002. Знайти ймовірність того, що в даний момент часу надійде: а) 5 заявок; б) не менше ніж 3 і не більше 7 заявок; в) жодна заявка не надійде.

Розв'язання.

а) За умовою $n=1000, p = 0,002, k = 5$.

В даному випадку мають місце масові малоймовірні події. Хороше наближення в таких випадках дає теорема Пуассона, згідно з якою ймовірність настання події n разів у k випробуваннях обчислюють за формулою (1.3.7):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$

Отже,
$$P_{1000}(5) \approx \frac{2^5}{5!} e^{-2} = 0,0361$$
.

б)
$$P_{1000}(3 \leq k \leq 7) = P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) + P_{1000}(6) + P_{1000}(7).$$

За табл. 3 додатку знаходимо значення кожної ймовірності і сумуємо їх:

$$P_{1000}(3 \leq k \leq 7) \approx 0,1804 + 0,0902 + 0,0361 + 0,0120 + 0,0034 = 0,3221.$$

в) $k = 0$, тоді:

$$P_{1000}(0) \approx \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0,1353.$$

ЗАВДАННЯ №7

Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

x_i	4	8	13
p_i	0,5	0,3	p_3

Визначити невідому ймовірність p_3 . Записати функцію розподілу ймовірностей $F(x)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Розв'язання.

Оскільки згідно формули (1.4.1):

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

тобто $0,5 + 0,3 + p_3 = 1$, тоді $p_3 = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$.

Складаємо новий ряд розподілу:

x_i	4	8	13
p_i	0,5	0,3	0,2

Для дискретних випадкових величин функція розподілу ймовірностей $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, тобто згідно формули (1.4.3), маємо:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4; \\ 0,5, & 4 < x \leq 8; \\ 0,8, & 8 < x \leq 13; \\ 1, & x > 13. \end{cases}$$

Математичне сподівання випадкової величини X обчислюємо за формулою (1.4.8):

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 4 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,2 = 7.$$

Для обчислення дисперсії скористаємося формулою (1.4.10):

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

У нашому випадку маємо:

$$M(X^2) = 4^2 \cdot 0,5 + 8^2 \cdot 0,3 + 13^2 \cdot 0,2 = 61,$$

$$M^2(X) = 7^2 = 49,$$

$$D(X) = 61 - 49 = 12.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ випадкової величини X за формулою (1.4.11):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{12} \approx 3,5.$$

ЗАВДАННЯ №8

Неперервну випадкову величину X задано функцією $F(x)$ розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;

в) визначити двома способами (за функціями $f(x)$ і $F(x)$) ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(2,2; 2,8)$.

Розв'язання.

а) За означенням (1.4.4) щільність імовірності $f(x) = F'(x)$, тому:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2(x-2), & 2 < x < 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

б) Для неперервної випадкової величини X математичне сподівання згідно формули (1.4.9):

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^2 x \cdot 0 dx + \int_2^3 x \cdot 2(x-2) dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 dx = 2 \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3 = 2 \left[\left(\frac{3^3}{3} - 3^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) \right] = 2 \left(9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 \right) = 2 \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \\ &= 2 \cdot \frac{12-8}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Дисперсію $D(X)$ обчислюємо за формулою $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^2 x^2 \cdot 0 dx + \int_2^3 x^2 \cdot 2(x-2) dx = 2 \int_2^3 (x^3 - 2x^2) dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_2^3 = 2 \left[\left(\frac{3^4}{4} - \frac{2 \cdot 3^3}{3} \right) - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} \right) \right] = \\ &= 2 \left[\left(\frac{81}{4} - 18 \right) - \left(4 - \frac{16}{3} \right) \right] = 2 \left(\frac{81}{4} - 18 - 4 + \frac{16}{3} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{81}{4} - 22 + \frac{16}{3} \right) = 2 \cdot \frac{243 - 264 + 64}{12} = \frac{43}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } D(X) = \frac{43}{6} - \left(\frac{8}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

в) І спосіб: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

$$P(2,2 < X < 2,8) = F(2,8) - F(2,2) = (2,8 - 2)^2 - (2,2 - 2)^2 = 0,6.$$

$$\text{II спосіб: } P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} P(2,2 < X < 2,8) &= \int_{2,2}^{2,8} 2(x-2) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{2,2}^{2,8} = \\ &= 2 \left[\left(\frac{2,8^2}{2} - 2 \cdot 2,8 \right) - \left(\frac{2,2^2}{2} - 2 \cdot 2,2 \right) \right] = 2(3,92 - 5,6 - 2,42 + 4,4) = 0,6. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ №9

Випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти функцію $F(x)$ розподілу випадкової величини X .

Розв'язання.

Функцію розподілу $F(x)$ знаходимо за формулою (1.4.7): $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

При $x \leq -\frac{\pi}{2}$: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

При $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dt + \int_{-\pi/2}^x \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_{-\pi/2}^x = \frac{1}{2} (\sin x - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} (\sin x + 1).$$

При $x > \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^x 0 dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) \right) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} (\sin x + 1), & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ №10

В результаті вибіркового аналізу добової виручки (тис. грн) на маршруті №1 автоперевізником отримано вибірку обсягу $n=40$. За поданими нижче вибірковими даними для кількісної ознаки X —добової виручки на маршруті №1:

0,87	0,94	0,99	0,90	0,90	0,87	0,85	0,87	0,99	0,97
0,90	0,94	0,87	0,87	0,82	0,90	0,94	0,90	0,90	0,81
0,85	0,85	0,87	0,94	0,81	0,82	0,87	0,97	0,94	0,85
0,90	0,94	0,85	0,81	0,87	0,85	0,90	0,82	0,82	0,87

1) Скласти дискретний статистичний розподіл вибірки. За отриманим розподілом знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$, побудувати її графік.

2) Скласти інтервальний статистичний розподіл вибірки. За отриманим розподілом побудувати гістограму відносних частот.

3) Знайти точкові незміщені оцінки генеральних параметрів ознаки X – математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

4) Припускаючи нормальний розподіл випадкової величини знайти з заданою надійністю $\gamma=0,95$ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання при відомому $\sigma=0,1$ дес. тис. грн.

Розв'язання.

1) Випишемо різні значення варіант, що потрапили у вибірку, і розмістивши їх в порядку зростання отримаємо дискретний варіаційний ряд: 0,81; 0,82; 0,85; 0,87; 0,90; 0,94; 0,97; 0,99.

Визначимо частоту появи кожної варіанти у вибірці і запишемо дискретний статистичний розподіл вибірки у вигляді статистичного ряду частот:

x_i	0,81	0,82	0,85	0,87	0,90	0,94	0,97	0,99
n_i	3	4	6	9	8	6	2	2

Математичне обчислення емпіричної функції розподілу виконуємо згідно формули (1.5.8):

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n – об'єм вибірки, n_x – кількість варіант, менших за x .

Оскільки найменше значення варіанти $x_1 = 0,81$, то $F^*(x) = 0$ для всіх $x \leq 0,81$.

Значення $x < 0,82$, а саме $x_1 = 0,81$, спостерігається три рази, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{3}{40} = 0,075$$

при $0,81 < x \leq 0,82$.

Аналогічно значення $x < 0,85$, а саме $x_1 = 0,81$, $x_2 = 0,82$ спостерігалися $3+4=7$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{7}{40} = 0,175$$

при $0,82 < x \leq 0,85$.

Значення $x < 0,87$, а саме $x_1 = 0,81$, $x_2 = 0,82$, $x_3 = 0,85$ спостерігалися $3+4+6=13$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{13}{40} = 0,325$$

при $0,85 < x \leq 0,87$.

Значення $x < 0,9$, а саме $x_1 = 0,81$, $x_2 = 0,82$, $x_3 = 0,85$, $x_4 = 0,87$ спостерігалися $3+4+6+9=22$ рази, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{22}{40} = 0,55$$

при $0,87 < x \leq 0,90$.

Значення $x < 0,94$, а саме $x_1 = 0,81$, $x_2 = 0,82$, $x_3 = 0,85$, $x_4 = 0,87$, $x_5 = 0,9$ спостерігалися $3+4+6+9+8=30$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{30}{40} = 0,75$$

при $0,90 < x \leq 0,94$.

Значення $x < 0,97$, а саме $x_1 = 0,81$, $x_2 = 0,82$, $x_3 = 0,85$, $x_4 = 0,87$, $x_5 = 0,9$, $x_6 = 0,94$ спостерігалися $3+4+6+9+8+6=36$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{36}{40} = 0,9$$

при $0,94 < x \leq 0,97$.

Значення $x < 0,99$, а саме $x_1 = 0,81$, $x_2 = 0,82$, $x_3 = 0,85$, $x_4 = 0,87$, $x_5 = 0,9$, $x_6 = 0,94$, $x_7 = 0,97$ спостерігалися $3+4+6+9+8+6+2=38$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{38}{40} = 0,95$$

при $0,97 < x \leq 0,99$.

Оскільки $x_8 = 0,99$ – найбільше значення варіанти, то $F^*(x) = 1$ при $x > 0,99$. Таким чином, шукана емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0,81; \\ 0,075 & \text{при } 0,81 < x \leq 0,82; \\ 0,175 & \text{при } 0,82 < x \leq 0,85; \\ 0,325 & \text{при } 0,85 < x \leq 0,87; \\ 0,55 & \text{при } 0,87 < x \leq 0,90; \\ 0,75 & \text{при } 0,90 < x \leq 0,94; \\ 0,9 & \text{при } 0,94 < x \leq 0,97; \\ 0,95 & \text{при } 0,97 < x \leq 0,99; \\ 1 & \text{при } x > 0,99. \end{cases}$$

III графік представлено на рис. 3.1.

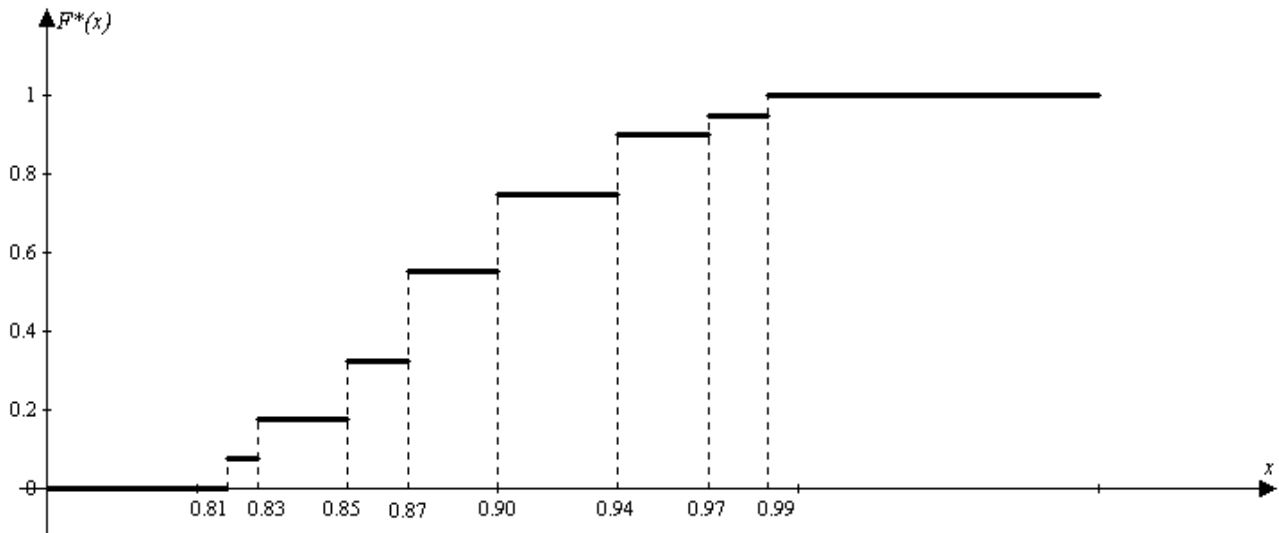


Рис. 3.1 – Графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$

2) Побудуємо інтервальний статистичний розподіл вибірки. Для визначення кількості проміжків k використовуємо напівемпіричну формулу (1.5.4):

$$k = 1,72\sqrt[3]{n} = 1,72\sqrt[3]{40} \approx 6.$$

Довжину проміжків знаходимо за формулою (1.5.6):

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{0,99 - 0,81}{6} = 0,03,$$

де $x_{\min}$, $x_{\max}$ – найменша та найбільша варіанта відповідно.

Тоді інтервальний варіаційний ряд матиме вигляд:

(0,81; 0,84), (0,84; 0,87), (0,87; 0,90), (0,90; 0,93), (0,93; 0,96), (0,96; 0,99).

Підсумуємо частоти варіант, що потрапили у кожен частинний інтервал, при цьому частоти варіант, які збігаються з межами інтервалів, поділимо порівну між суміжними інтервалами. Маємо інтервальний статистичний ряд частот:

Інтервал	(0,81; 0,84)	(0,84; 0,87)	(0,87; 0,90)	(0,90; 0,93)	(0,93; 0,96)	(0,96; 0,99)
n_i	7	10	9	4	6	4

Для побудови гістограми відносних частот обчислимо щільності відносних частот на кожному з частинних інтервалів:

$$\frac{w_1}{h} = \frac{n_1}{n \cdot h} = \frac{7}{40 \cdot 0,03} = 5,83, \quad \frac{w_2}{h} = \frac{n_2}{n \cdot h} = \frac{10}{40 \cdot 0,03} = 8,33 \text{ і т.д.}$$

Результати обчислень запишемо в таблиці:

Інтервал	(0,81; 0,84)	(0,84; 0,87)	(0,87; 0,90)	(0,90; 0,93)	(0,93; 0,96)	(0,96; 0,99)
w_i/h	5,83	8,33	7,5	3,33	5	3,33

Будуємо гістограму (рис. 3.2) – східчасту фігуру у вигляді послідовності прямокутників з основами довжиною $h = 0,03$ і висотами рівними щільностям відносних частот $\frac{w_i}{h}$.

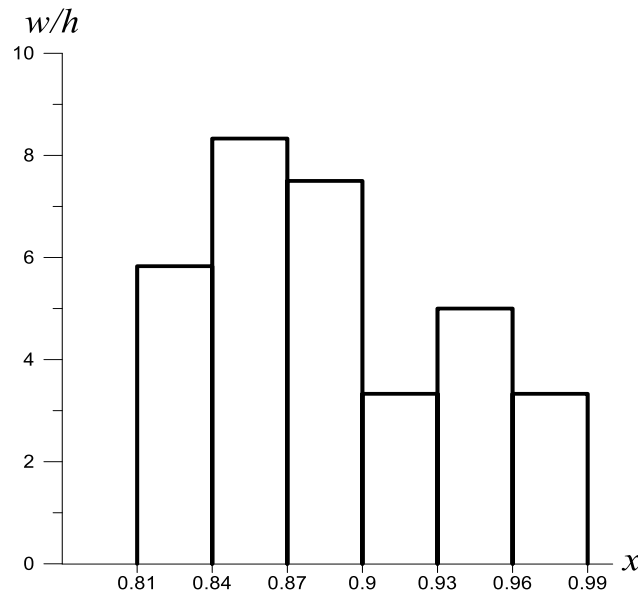


Рис. 3.2 – Гістограма відносних частот

3) Точкові оцінки генеральних параметрів ознаки X будемо шукати за дискретним статистичним розподілом вибірки.

Точковою незміщеною оцінкою математичного сподівання є вибіркове середнє:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \sum_{i=1}^k x_i w_i = 0,81 \cdot 0,075 + 0,82 \cdot 0,1 + 0,85 \cdot 0,15 + 0,87 \cdot 0,225 + \\ + 0,90 \cdot 0,2 + 0,94 \cdot 0,15 + 0,97 \cdot 0,05 + 0,99 \cdot 0,05 = 0,885.$$

Точковою незміщеною оцінкою дисперсії є виправлена вибіркова дисперсія:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i,$$

де D - вибіркова дисперсія.

У нашому випадку маємо:

$$S^2 = \frac{1}{40-1} \left[(0,81 - 0,885)^2 \cdot 3 + (0,82 - 0,885)^2 \cdot 4 + (0,85 - 0,885)^2 \cdot 6 + \right. \\ \left. + (0,87 - 0,885)^2 \cdot 9 + (0,9 - 0,885)^2 \cdot 8 + (0,94 - 0,885)^2 \cdot 6 + \right. \\ \left. + (0,97 - 0,885)^2 \cdot 2 + (0,99 - 0,885)^2 \cdot 2 \right] = 0,0025.$$

Точковою незміщеною оцінкою середнього квадратичного відхилення є виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0,0025} = 0,05.$$

4) Довірчий інтервал для математичного сподівання m при відомому середньому вквadraticному відхиленні σ знаходимо за формулою (1.6.8):

$$\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Тут n – об'єм вибірки, а значення t обчислюємо за формулою $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,5 \cdot 0,95 = 0,475$ з таблиці значень функції Лапласа (див. додаток *табл. 2*). Отже $t = 1,96$, оскільки, саме при такому значенні аргумента t функція Лапласа $\Phi(t)$ набуває значення 0,475.

Обчислимо межі довірчого інтервалу:

$$\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0,885 - \frac{1,96 \cdot 0,1}{6,32} = 0,885 - 0,031 = 0,854;$$

$$\bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0,885 + \frac{1,96 \cdot 0,1}{6,32} = 0,885 + 0,031 = 0,916.$$

Отже, з ймовірністю не меншою за 0,95 можна стверджувати, що середнє значення добової виручки на маршруті №1 знаходиться у межах від 0,854 до 0,916 (*дес. тис. грн.*).

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3987	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3937	3932	3925	3918
0,2	3910	3901	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	2291	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2035	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1526	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0271	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0159	0155	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43872	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48860	48899
2,3	48928	48966	48983	49010	49036	49061	49086	49110	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	49977									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Таблиця 3
Розподіл Пуассона

$$\text{Значення функції } P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3176	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Таблиця 4

Таблиця значень $t_{\gamma} = t(\gamma, n)$

n / γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,36	5,04
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92

n / γ	0,95	0,99	0,999
20	2,093	0,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,991	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Таблиця 5

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n / γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92

n / γ	0,95	0,99	0,999
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,211
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко Н.В., Наголкіна З.І., Пастухова М.С. Теорія ймовірностей : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2016. 111 с., URL: https://org2.knuba.edu.ua/pluginfile.php/36229/mod_resource/content/4/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96.%20%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf (дата звернення: 04.01.2025).
2. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с., URL: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/04/Vasyl-kiv-I.M.-TIMS_CHASTYNA_1.pdf (дата звернення: 04.01.2025).
3. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахо І. В. Теорія ймовірностей : навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 103 с.
4. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей і математична статистика : Посібник з розв'язування задач. Київ : Центр навчальної літератури, 2019. 576 с.
5. Комбінаторне, імовірнісне мислення та математична статистика. Збірник завдань із повними розв'язками / Ю.О. Захарійченко та ін. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2014. 128 с.
6. Левківська Л.В. Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів денної форми навчання спеціальності 075 «Маркетинг» освітньої програми «Маркетинг послуг». Київ : НТУ, 2022. 90 с.
7. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с., URL: <http://socrates.vsau.org/repository/getfile.php/24513.pdf> (дата звернення: 04.01.2025).
8. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Львів : ЛьвДУВС, 2017. 292 с., URL: <https://dspace.lvduvs.edu.ua/bitstream/1234567890/629/1/%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%20%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D0%BF%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf> (дата звернення: 04.01.2025).
9. Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести) : навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / Соловко Я.Т., Остафійчук П.Г., Гарпуль О.З., Войтик С.А. Івано-Франківськ : Репозитарій /ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. 150 с.
10. Шелестовський Б.Г., Габрусев Г.В., Габрусєва І.Ю. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Тернопіль : СМП «Тайп», 2023. 142 с., URL: https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/41009/1/%D0%A2%D0%86%D0%9C%D0%A1_2023.pdf (дата звернення: 04.01.2025).

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної роботи
з дисципліни:
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»
для здобувачів:
рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
форма здобуття вищої освіти – заочна
галузь знань D «Бізнес, адміністрування та право»
спеціальність D2 «Фінанси, банківська справа,
страхування та фондовий ринок»
освітньо – професійна програма
«Фінанси, банківська справа та страхування»

Укладачі:

Людмила ЛЕВКІВСЬКА;

Ірина ГОРБУНОВИЧ;

Людмила ШЕВЧУК.