



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет транспортних та інформаційних технологій

Кафедра вищої математики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи №2
з дисципліни «Вища математика» для здобувачів:
рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
заочної форми здобуття освіти
галузь знань 12 «Інформаційні технології»
спеціальність 122 «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки»



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет транспортних та інформаційних технологій

Кафедра вищої математики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи №2

з дисципліни «Вища математика» для здобувачів:

рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

заочної форми здобуття освіти

галузь знань 12 «Інформаційні технології»

спеціальність 122 «Комп'ютерні науки»

освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки»

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні Науково-методичної ради

Національного транспортного університету

протокол № 29 від « 28 » березня 2025 р.

Перший проректор,

Професор _____ Олександр МЕЛЬНИЧЕНКО

КИЇВ – 2025

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи №2 з дисципліни «Вища математика» для здобувачів: рівень вищої освіти – перший (бакалаврський), заочної форми здобуття освіти, галузь знань 12 «Інформаційні технології», спеціальність 122 «Комп’ютерні науки», освітньо-професійна програма «Комп’ютерні науки» / Укладачі: Л.В. Шевчук, Н.В. Шлюнь, Ю.О.Засць, Л.В.Левківська – К.: НТУ, 2025. – 84 с.

Укладачі:

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Людмила ШЕВЧУК;

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Наталія ШЛЮНЬ;

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Юлія ЗАЄЦЬ;

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Людмила ЛЕВКІВСЬКА

Рекомендовано Методичною комісією факультету заочного, дистанційного навчання та підготовки іноземних громадян

протокол № 14 від «03» лютого 2025 року

Голова Методичної комісії факультету

Віталій СІМОНЕНКО

© Людмила ШЕВЧУК, 2025 р.

© Наталія ШЛЮНЬ, 2025 р.

© Юлія ЗАЄЦЬ, 2025 р.

© Людмила ЛЕВКІВСЬКА, 2025 р.

© Національний транспортний університет, 2025 р.

Зміст

Вступ.....	5
1. Теоретичний матеріал для виконання контрольної роботи № 2...	7
1.1. Інтегральне числення функцій однієї змінної.....	7
1.2. Диференціальне числення функції багатьох змінних.....	21
1.3. Диференціальні рівняння.....	25
2. Контрольна робота №2.....	29
3. Зразок виконання контрольної роботи №2.....	56
4. Запитання до підсумкового контролю.....	74
5. Вимоги щодо виконання, оформлення та здачі контрольної роботи	78
6. Список рекомендованої літератури.....	79
Довідковий матеріал	81

Вступ

Для студентів факультету заочного, дистанційного навчання та підготовки іноземних громадян спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» освітньої програми «Комп'ютерні науки» навчальним планом передбачені лекційні і практичні заняття з вищої математики протягом настановчої та під час екзаменаційної сесій. Проте дані заняття мають більш оглядовий характер. Їхня мета – акцентувати увагу на основних розділах курсу, виділити окремі питання програми (найважливіші, складні для розуміння або недостатньо детально висвітлені в рекомендованій літературі), сформулювати основні теореми та вивести ключові формули, а також детально розібрати найбільш значущі практичні задачі. Цього зазвичай недостатньо для глибокого засвоєння навчального матеріалу, тому студентам-заочникам слід багато працювати над матеріалом самостійно, використовуючи підручники, навчальні посібники та інші джерела. В цьому їм повністю допоможуть ці методичні вказівки, які містять усі необхідні теоретичні відомості, що доповнюються достатньою кількістю розв'язаних практичних задач.

Мета курсу вищої математики – побудувати науковий та інтелектуальний фундамент, а на ньому сформувати знання, уміння й навички, необхідні для успішного вивчення напрямних дисциплін спеціальності. Набуті знання повинні бути достатніми, щоб майбутні фахівці могли опрацьовувати математичні моделі, пов'язані з їх подальшою практичною діяльністю, а по можливості й складати такі моделі.

Сучасні комп'ютерні науки досить суттєво використовують математичний апарат. Тому актуальним завданням дисципліни є ознайомлення студентів з основами математичних методів.

У процесі вивчення курсу дисципліни «Вища математика» студент-заочник освітньої програми «Комп'ютерні науки» має самостійно виконати контрольну роботу, яка складається з ряду практичних задач, сформульованих у відповідності до робочої програми.

Виконання контрольної роботи є обов'язковим етапом у навчальному процесі для здобувача освіти. Вона дає можливість глибше засвоїти теоретичний матеріал, набути практичних навичок та перевірити власне розуміння вивченого матеріалу.

В результаті виконання контрольної роботи здобувачі набувають таких навичок: розвивати первинні навички математичних прикладних питань: переклад реальної задачі на адекватну математичну мову, вибір оптимального методу дослідження, інтерпретація результату дослідження та оцінка його точності; доведення, розв'язання задачі до кінцевого результату – числа, графіка, точного якісного висновку і т.д., застосовуючи при цьому обчислювальні засоби, таблиці, довідники; вміння самостійно розбиратися у математичному апараті, який застосовується у літературі зі спеціальності; розвивати аналітичне мислення, виховувати у студентів прикладну математичну культуру, необхідну інтуїцію та ерудицію у питаннях застосування математики.

В освітній програмі: «Комп'ютерні науки» підготовки бакалавра студенти в результаті вивчення дисципліни «Вища математика» набувають таких компетентностей: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями; здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

Результати навчання за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» передбачають: застосовувати знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп'ютерних наук; використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації.

1. Теоретичний матеріал для виконання контрольної роботи № 2.

1.1. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Поняття первісної, невизначеного інтегралу. Таблиця інтегралів. Основні методи інтегрування. Інтегрування раціональних функцій. Визначений інтеграл та його застосування в геометрії. Формула Ньютона-Лейбніца. Невласний інтеграл I та II роду.

Література: [2], [3], [8-10], [12].

Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на відрізок $[a, b]$, якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то і кожна функція виду $F(x) + C$ також буде первісною для $f(x)$.

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm A}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Властивості невизначеного інтеграла

1. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

2. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

4. Сталій множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)dx = F(u) + C$.

Основні методи інтегрування

1) Метод безпосереднього інтегрування

Обчислення невизначеного інтеграла з використанням таблиці інтегралів та властивостей інтегралів називають безпосереднім інтегруванням. Для обчислення невизначеного інтеграла виконують тотожні перетворення підінтегральної функції, щоб звести інтеграл до табличного.

2) Метод підстановки (заміни змінної)

Інтегрування шляхом введення нової змінної (метод підстановки) базується на формулі:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

де $x = \varphi(t)$ – диференційовна функція змінної t .

3) Метод інтегрування частинами

Якщо дві функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовані від x , то має місце формула:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

В якості u зазвичай обирається функція, яка після диференціювання спрощується, а в якості dv – все, що залишилося.

Рекомендації до застосування методу інтегрування частинами

$\int u dv$	u	dv
$\int P(x) \ln x dx$	$u = \ln x$	$dv = P(x) dx$
$\int P(x) \arcsin x dx$	$u = \arcsin x$	
$\int P(x) \arccos x dx$	$u = \arccos x$	
$\int P(x) \arctg x dx$	$u = \arctg x$	
$\int P(x) \text{arcctg} x dx$	$u = \text{arcctg} x$	
$\int P(x) e^{kx} dx$	$u = P(x)$	$dv = e^{kx} dx$
$\int P(x) \sin kx dx$		$dv = \sin kx dx$
$\int P(x) \cos kx dx$		$dv = \cos kx dx$

Інтегрування раціональних дробів.

Раціональною функцією (раціональним дробом) називають відношення многочленів

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}.$$

Якщо степінь многочлена в чисельнику менше за степінь многочлена у знаменнику ($n < m$), то дріб називають *правильним і неправильним* у протилежному випадку ($n \geq m$).

Будь-який неправильний раціональний дріб можна зобразити як суму многочлена (цілої частини) і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)},$$

де $R_{n-m}(x)$ — ціла частина дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$; $\tilde{P}(x)$ — остача від ділення $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Елементарним дробом називають правильний раціональний дріб одного з трьох типів:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = \left| \frac{t=x-a}{dt=dx} \right| = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t| + C = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \left| \frac{t=x-a}{dt=dx} \right| = A \int \frac{dt}{t^n} = A \int t^{-n} dt = A \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)t^{n-1}} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$$

Розв'язання:

1) знаходимо похідну від квадратного тричлену, що розташований у знаменнику:

$$(x^2 + px + q)' = 2x + p.$$

2) завдяки тотожнім перетворенням приводимо знайдену похідну до лінійного виразу, що містив заданий інтеграл у чисельнику:

$$\frac{M}{2}(2x+p) - \frac{Mp}{2} + N = Mx + N$$

3) отриманий вираз підставляємо у чисельник, розбиваємо інтеграл на суму двох інтегралів та знаходимо кожен окремо:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) - \frac{Mp}{2} + N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} dx + \int \frac{-\frac{Mp}{2} + N}{x^2+px+q} dx$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \left| \frac{t=x^2+px+q}{dt=(2x+p)dx} \right| = \frac{M}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{M}{2} \ln|t| + C = \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + C;$$

$$I_2 = \int \frac{-\frac{Mp}{2} + N}{x^2+px+q} dx = \left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = (\text{виділимо повний квадрат у знаменнику}) = \left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q} = \left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}$$

а) якщо $q-\frac{p^2}{4}=a^2>0$, то маємо $\left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$

$$\left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2} = \left| \frac{t=x+\frac{p}{2}}{dt=dx} \right| = \left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{t^2+a^2} = \frac{\left(-\frac{Mp}{2} + N \right)}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{\left(-\frac{Mp}{2} + N \right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

б) якщо $q-\frac{p^2}{4}=-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=-a^2<0$, то маємо

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-a^2} = \\ & = \left| \frac{t=x+\frac{p}{2}}{dt=dx} \right| = \left(-\frac{Mp}{2} + N \right) \int \frac{dx}{t^2-a^2} = \\ & = \frac{\left(-\frac{Mp}{2} + N \right)}{2a} \ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right| + C = \frac{\left(-\frac{Mp}{2} + N \right)}{2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}} \ln \left| \frac{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\text{Отже } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = I_1 + I_2.$$

Теорема (про розклад на суму елементарних дробів).

Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних раціональних дробів, коефіцієнти яких знаходяться за методом невизначених коефіцієнтів.

Правило інтегрування раціональної функції:

1) Виділити цілу частину, якщо підінтегральна функція $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ –

2) неправильний дріб: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)},$

де дріб $\frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$ є правильним і нескоротним.

3) Розкласти знаменник $Q_m(x)$ на множники вигляду $(x-a)^k$ та $(x^2+px+q)^s$, де $p^2-4q < 0$, k, s – цілі додатні числа.

4) Кожному множнику $(x-a)^k$ поставити у відповідність елементарні дроби $\frac{A_k}{(x-a)^k}, \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}, \dots, \frac{A_1}{x-a}$, а кожному множнику $(x^2+px+q)^s$

поставити у відповідність елементарні дроби

$$\frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s}, \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}}, \dots, \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q}.$$

5) Прирівняти $\frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$ до суми всіх знайдених елементарних дробів,

звести їх до спільного знаменника $Q_m(x)$ і прирівняти чисельники знайденої суми до $\tilde{P}(x)$.

6) Обчислити невизначені коефіцієнти A_i, M_i, C_i , надаючи x конкретних значень, або з умови, що рівні многочлени повинні мати рівні коефіцієнти

(тобто прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах дробу).

7) Записати розклад раціональної функції на суму найпростіших раціональних функцій.

8) Проінтегрувати знайдену суму і визначити $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$.

Інтегрування тригонометричних функцій

I Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R – раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$ за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi; \pi)$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції. При цьому:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Цю підстановку застосовують до знаходження інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c},$$

завдяки якій цей інтеграл перетворюється у інтеграл від раціонального дробу.

II Інтеграли вигляду $\int \sin^n x \cos^m x dx$

1. Якщо хоча б одне з чисел m або n — непарне, то відокремлюють від непарного степеня один співмножник і виражають із допомогою формули

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

парний степінь, що залишився. Отже, якщо n додатне непарне число, то зробимо підстановку $\cos x = t$, а якщо m то $\sin x = t$.

2. Якщо ж m та n — парні числа, то степені понижують, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

III Інтеграли вигляду

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx, \int \sin mx \cdot \sin nx dx, \int \cos mx \cdot \cos nx dx$$

Їх обчислюють розкладанням підінтегральної функції в суму за формулами:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

IV Інтеграли вигляду $\int R(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx$, де R – раціональна функція відносно $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ розв’язуються за допомогою підстановки

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ – довільне розбиття цього відрізка на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $x = \overline{1, n}$. На кожному з них виберемо довільну точку ξ_i і складемо суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Число I_n називається *інтегральною сумою* функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і вибору точок ξ_i . Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Якщо існує скінчена границя інтегральної суми I_n при $\lambda \rightarrow 0$, що не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a, b]$, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і

позначається $\int_a^b f(x) dx$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Число a називають нижньою, число b - верхньою межею визначеного інтеграла.

Якщо $F(x)$ - первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (формула Ньютона-Лейбніца). Різницю $F(b) - F(a)$ записують також у вигляді $F(x) \Big|_a^b$.

Основні властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів цих функцій:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

2. Сталій множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx .$$

3. Від переставляння меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx .$$

4. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

5. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz .$$

6. Відрізок інтегрування можна розбити на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ маємо $f(x) \geq 0$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ маємо $f(x) \leq g(x)$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

9. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$ ($a < b$), то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Методи обчислення визначених інтегралів

1) Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні таблиці інтегралів, властивостей визначеного інтеграла.

2) Метод заміни змінної

За допомогою підстановки $x = \varphi(t)$ інтеграл зводиться до іншого визначеного інтеграла з новою змінною t , яка буде змінюватись на відрізку $[t_1, t_2]$, де $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$. Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[t_1, t_2]$, а тому і функція $f(\varphi(t))$ є визначена і неперервна на цьому ж відрізку.

Часто замість заміни $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = \psi(x)$. У цьому випадку межі t_1 і t_2 визначаються безпосередньо за формулами $t_1 = \psi(a)$, $t_2 = \psi(b)$.

Важливо те, що заміняючи змінну у визначеному інтегралі, знаходять також нові межі інтегрування, і надалі вже не повертаються до початкової змінної.

3) *Метод інтегрування частинами*

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ - неперервно диференційовні функції на $[a, b]$, то справедлива формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі плоскої фігури

Якщо на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geq 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $y = b$, $y = 0$ знаходять за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ змінює знак, то

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) та прямими $x = a$ і $x = b$ знаходять за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Довжина дуги кривої

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ функція $f(x)$ і $f'(x)$ похідна неперервні на $[a, b]$, то довжина дуги цієї кривої виражається інтегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Обчислення об'єму тіла

Нехай $S(x)$ – площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox у точці з абсцисою x , $x \in [a, b]$, причому $S(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$. Тоді об'єм тіла виражається інтегралом

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox , якщо вона обмежена неперервною лінією $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Якщо криволінійна трапеція, яка обмежена неперервною лінією $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$, віссю ординат і прямими $y = c$ і $y = d$, обертається навколо осі Oy , то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b \varphi^2(y) dy = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого роду

Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду). Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і інтегрована на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує

скінченна границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, її називають невласним інтегралом першого роду і позначають $\int_a^{\infty} f(x)dx$. Таким чином, за означенням

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо існує скінченна границя, то інтеграл називається збіжним. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то інтеграл є розбіжним.

Аналогічне означення невласного інтеграла на проміжку $(-\infty; a]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

а також

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

де c — довільне дійсне число.

Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду

1) (ознака порівняння)

Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і

задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

впливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

впливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ (ознака порівняння)

2) (гранична ознака порівняння)

Якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$, ($f(x) > 0$, $g(x) > 0$), то

інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно збігаються, або розбігаються.

3) Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається, то збігається і невластний інтеграл

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$, причому він називається абсолютно збіжним.

Невластні інтеграли другого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$. Точку $x = b$ назвемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b - 0$. Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b - \varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$. Тоді якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

то її називають невластним інтегралом другого роду і позначають

$\int_a^b f(x) dx$. Отже, за означенням

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Якщо існує скінченна границя, то інтеграл називається збіжним. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то інтеграл є розбіжним.

Аналогічно якщо $x = a$ — особлива точка, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c \in (a; b)$,

то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Ознаки збіжності невластних інтегралів другого роду аналогічні ознакам для інтегралів першого роду.

1.2. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

Функція багатьох змінних. Градієнт функції. Похідна за напрямком. Дотична площина. Нормаль до поверхні. Локальний екстремум функції двох змінних. Необхідна умова локального екстремуму. Достатня умова локального екстремуму.

Література: [7], [9], [11], [12].

Поняття функції двох змінних

Нехай кожній впорядкованій парі чисел (x, y) із деякої області D за деяким правилом або законом ставиться у відповідність одне цілком певне дійсне значення $z \in E$. Тоді z називається функцією двох змінних; x та y – незалежними змінними, D – областю визначення функції, E – область значень функції. Позначається функція двох змінних у вигляді рівності $z = f(x, y)$. Аналогічно можна ввести поняття функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$.

Частинною похідною $\frac{\partial z}{\partial x}$ від функції $z = f(x, y)$ по змінній x називається границя

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогічне означення частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ по y .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Таким чином, частинною похідною першого порядку по x від функції $z = f(x, y)$ називається похідна по x , обчислена з припущення, що y – стала.

Частинною похідною по y від функції $z = f(x, y)$ називається похідна по y , обчислена з припущення, що x – стала.

Повний диференціал першого порядку функції двох змінних:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називаються частинні похідні від її перших похідних:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Похідні у другому рядку називаються мішаними частинними похідними другого порядку. Доведено, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Диференціал другого порядку знаходять за формулою:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Похідна за напрямком та градієнт функції

Похідна функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}(l_x, l_y, l_z)$ обчислюється за формулою:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

$$|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}, \cos \beta = \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}, \cos \gamma = \frac{l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}.$$

Градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ знаходять за формулою:

$$\overrightarrow{grad} u \Big|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \vec{k}.$$

Дотична площина та нормаль до поверхні

Якщо кожній парі чисел x та y з деякої множини відповідає єдине значення z , яке разом з x і y задовольняє рівняння $F(x, y, z) = 0$, то це

рівняння визначає неявну функцію $z = \varphi(x, y)$, частинні похідні якої знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Рівняння $F(x, y, z) = 0$ визначає в просторі $Oxyz$ деяку поверхню. Рівнянь дотичної площини в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ даної поверхні має вигляд:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0} (z - z_0) = 0.$$

Нормаль до поверхні в точці M_0 – пряма, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці. Вона задається рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$$

Необхідна та достатня умови локального екстремуму функції

Нехай точка $P(x_0; y_0)$ називається точкою максимуму (мінімуму) функції $z = f(x, y)$, якщо існує окіл точки $P(x_0; y_0)$ такий, що для будь-якої точки (x, y) із цього околу виконується нерівність $f(x_0; y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0; y_0) \leq f(x, y)$).

Оскільки функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначається лише в малому околі точки $P(x_0; y_0)$, то його називають локальним.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ необхідні і достатні умови мають наступний вигляд.

Необхідні умови існування екстремуму функції $z = f(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow P(x_0; y_0) - \text{екстремум}$$

Достатні умови існування екстремуму функції $z = f(x, y)$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_P, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_P, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_P;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

1) якщо $\Delta > 0$, то екстремум існує і якщо $\Delta > 0$, $A > 0$, то точка P є точкою мінімуму.

2) якщо $\Delta > 0$, то екстремум існує і якщо $\Delta > 0$, $A < 0$, то точка P є точкою максимуму.

3) якщо $\Delta < 0$, то точка P не є екстремум.

4) якщо $\Delta = 0$, потрібно подальше дослідження.

1.3. Диференціальні рівняння.

Загальний розв'язок диференціального рівняння. Частинний розв'язок диференціального рівняння. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Література: [1], [2], [4-6], [8], [9], [12-17].

Загальні поняття та означення

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідну. Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної.

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{або} \quad y' = f(x, y)$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, y' – її похідна.

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція, яка задовольняє цьому рівнянню (тобто функція при підстановці якої в задане рівняння одержуємо тотожність).

Кожний розв'язок, отриманий із загального розв'язку при певному значенні сталої C називається частинним розв'язком.

Для знаходження частинного розв'язку необхідно задати умови $y(x_0) = y_0$, які називаються частинними умовами.

Задача знаходження частинного розв'язку при заданих початкових умовах називається задачею Коші

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду:

$$M(x)N(y)dy + P(y)Q(x)dx = 0,$$

де $M(x)$, $N(y)$, $P(y)$, $Q(x)$ – неперервні функції, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві

частини такого рівняння на вираз $M(y) \cdot P(y)$, одержимо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{N(y)}{P(y)} dy = -\frac{Q(x)}{M(x)} dx.$$

Для знаходження розв'язання такого рівняння необхідно проінтегрувати його обидві частини:

$$\int \frac{N(y)}{P(y)} dy = -\int \frac{Q(x)}{M(x)} dx + C, \text{ де } C = \text{const}.$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається однорідним, якщо має місце тотожність $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Функцію $f(x, y)$ можна записати $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi(1, u)$, де $u = \frac{y}{x}$.

Тобто функція $f(x, y)$ фактично залежить від однієї змінної $u = \frac{y}{x}$, звідки

$y = ux$, а $y' = xu' + u$. Якщо в однорідному диференціальному рівнянні $y' = f(x, y)$ шукану функцію $y(x)$ замінити на $y = ux$, то одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x),$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – неперервні функції, називається лінійним диференціальним рівнянням.

Загальний розв'язок такого рівняння знаходиться у вигляді добутку двох функцій $y = u(x) \cdot v(x)$. Враховуючи що, $y' = u'v + uv'$ задане рівняння набуває вигляду:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x) \text{ або } u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

Так як одна з функції u або v може бути обрана довільно, виберемо v таким чином, щоб $v' + p(x)v = 0$ тоді $u'v = f(x)$. Невідомі функції $u(x)$ і $v(x)$

знайдемо з системи диференціальних рівнянь, кожне з яких є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = f(x). \end{cases}$$

Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де p, q – числа.

Загальний розв'язок (y_{3H}) даного рівняння складається із суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (y_{3O}) та частинного розв'язку ($y_{чН}$) даного неоднорідного рівняння, тобто

$$y_{3H} = y_{3O} + y_{чН}.$$

Спочатку знаходять y_{3O} , розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Характеристичне рівняння по відношенню до цього рівняння має вигляд:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння залежить від вигляду коренів характеристичного рівняння $\left(k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)$, можливі три випадки:

№ з/п	Корені рівняння	Загальний розв'язок
1.	Дійсні різні $D = p^2 - 4q > 0$ $k_1 \neq k_2$	$y_{3O} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2.	Дійсні рівні $D = p^2 - 4q = 0$ $k_1 = k_2$	$y_{3O} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

3.	Комплексно-спряжені $D = p^2 - 4q < 0$ $k_{1,2} = a \pm bi, i = \sqrt{-1}$	$y_{30} = e^{\alpha x} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$
----	--	---

Частинний розв'язок $y_{\text{ЧН}}$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів, використовуючи вигляд правої частини $f(x)$. Можливі такі випадки:

1. Нехай $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$,

де многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$.

Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді

1) $y_{\text{ЧН}} = e^{\alpha x} Q_n(x)$, якщо $\alpha \neq k_{1,2}$ (не є коренем характеристичного рівняння);

2) $y_{\text{ЧН}} = x e^{\alpha x} Q_n(x)$, якщо $\alpha = k_1 \neq k_2$ (є простим коренем характеристичного рівняння);

3) $y_{\text{ЧН}} = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$, якщо $\alpha = k_1 = k_2$ (є двократним коренем характеристичного рівняння).

$Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$, ($A_0, A_1, \dots, A_n$ – невідомі сталі коефіцієнти, які знаходять методом невизначених коефіцієнтів).

2. Нехай $f(x) = e^{\alpha x} (a \cos \beta x + b \sin \beta x)$, тоді частковий розв'язок

1) $y_{\text{ЧН}} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, якщо $\alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}$ (не є коренем характеристичного рівняння);

2) $y_{\text{ЧН}} = x e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, якщо $\alpha \pm \beta i = k_{1,2}$ (є коренем характеристичного рівняння).

Якщо функція $f(x)$ містить лише один доданок із синуса або косинуса, то частинний розв'язок $y_{\text{ЧН}}$ все одно записують з обома доданками.

Для диференціального рівняння другого порядку загальний розв'язок містить дві довільні сталі. Задача Коші ставиться так:

Знайти такий розв'язок, який би задовольняв умови $y = y_0, y' = y'_0$, при $x = x_0$.

2. Контрольна робота №2

Завдання №1

Знайти невизначені інтеграли $\int f(x)dx$.

№ Варіанта	Вигляд функції $f(x)$			
1.	1)	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3};$	2)	$f(x) = \frac{3 + x^3 + 2x}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x} - 2}{x};$	4)	$f(x) = (2x - 3)e^x;$
	5)	$f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x^2(x - 4)};$	6)	$f(x) = \sin^5 x \cos^2 x.$
2.	1)	$f(x) = \frac{x^3 - 64}{x - 4};$	2)	$f(x) = \frac{3\sqrt{x} + 2x^2 - 1}{2x};$
	3)	$f(x) = e^{\cos 2x} \sin 2x;$	4)	$f(x) = \frac{(4x - 1)}{\cos^2 x};$
	5)	$f(x) = \frac{3x - 13}{(x + 5)(x - 2)};$	6)	$f(x) = \sin^2 6x.$
3.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 4};$	2)	$f(x) = \frac{5x^5 + 4x^2 - 5}{2x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{e^{\lg x + 1}}{\cos^2 x};$	4)	$f(x) = (4x + 2)\cos x;$
	5)	$f(x) = \frac{4 + 8x - x^2}{x(x + 2)^2};$	6)	$f(x) = \cos 5x \cos 7x.$
4.	1)	$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2};$	2)	$f(x) = \frac{4 \cdot 9^x - 2 \cdot 25^x}{15^x};$
	3)	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x};$	4)	$f(x) = (6x - 3)\sin x;$
	5)	$f(x) = \frac{5x + 9}{x^2 - 81};$	6)	$f(x) = \cos^7 x.$

5.	1)	$f(x) = \frac{x^2 - 121}{x - 11};$	2)	$f(x) = \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{x};$
	3)	$f(x) = (2 - 5x)^4;$	4)	$f(x) = \frac{(x + 4)}{\sin^2 x};$
	5)	$f(x) = \frac{3x - 1}{(x - 2)(x - 1)};$	6)	$f(x) = \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}.$
6.	1)	$f(x) = \frac{x^3 + 27}{x - 3};$	2)	$f(x) = \frac{x^8 - 2x + 5}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 4}{\cos^2 x};$	4)	$f(x) = \frac{\ln x}{x^3};$
	5)	$f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2(x + 5)};$	6)	$f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}.$
7.	1)	$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1};$	2)	$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}};$
	3)	$f(x) = \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}};$	4)	$f(x) = \frac{(x - 1)}{\cos^2 x};$
	5)	$f(x) = \frac{10x + 53}{(x + 6)(x - 1)};$	6)	$f(x) = \sin^8 x \cos^3 x.$
8.	1)	$f(x) = \frac{(x^2 - 4)(x + 5)}{x + 2};$	2)	$f(x) = \frac{4 \cdot 15^x - 2 \cdot 30^x}{30^x};$
	3)	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)};$	4)	$f(x) = x \cos 10x;$
	5)	$f(x) = \frac{3x + 9}{(x - 7)(x - 1)};$	6)	$f(x) = \cos 20x \cos 5x.$
9.	1)	$f(x) = \frac{x^3 + 125}{x + 5};$	2)	$f(x) = \frac{2x^3 - x + 1}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{9 - 4\ln^2 x}};$	4)	$f(x) = (2x + 5)\cos x;$
	5)	$f(x) = \frac{8 + 16x - x^2}{(x - 2)^2(x + 1)};$	6)	$f(x) = \cos^3 x.$

10.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + 9x + 14}{x + 7};$	2)	$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x};$
	3)	$f(x) = \frac{\sqrt{\arctg x}}{1 + x^2};$	4)	$f(x) = (6x + 5)\cos x;$
	5)	$f(x) = \frac{15x + 5}{(x - 4)(x + 1)};$	6)	$f(x) = \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}.$
11.	1)	$f(x) = \frac{(x^2 - 9)x}{x - 3};$	2)	$f(x) = \frac{2x^3 - x + 7}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x};$	4)	$f(x) = (x + 6)e^x;$
	5)	$f(x) = \frac{8x - 74}{(x + 3)(x - 11)};$	6)	$f(x) = \cos^4 x.$
12.	1)	$f(x) = \frac{x^3 + 64}{x - 4};$	2)	$f(x) = \frac{6x - 5x^2 + 3}{x};$
	3)	$f(x) = (x^5 - 2)^3 x^4;$	4)	$f(x) = \frac{3x + 2}{\sin^2 x};$
	5)	$f(x) = \frac{14x - 12}{x(x - 4)};$	6)	$f(x) = \sin x \cos^2 x.$
13.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2};$	2)	$f(x) = \frac{5 \cdot 9^x + 4 \cdot 64^x}{24^x};$
	3)	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x};$	4)	$f(x) = (3x - 1)\ln x;$
	5)	$f(x) = \frac{11x + 2}{x^2 - 4};$	6)	$f(x) = \sin^2 \frac{x}{4};$
14.	1)	$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x + 1};$	2)	$f(x) = \frac{2x^4 + 10x + 2x^2}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{x^2}{8 + x^3};$	4)	$f(x) = (2x - 7)\sin x;$
	5)	$f(x) = \frac{4x + 8}{(x + 7)(x + 3)};$	6)	$f(x) = \sin^3 x \cos^8 x.$

15.	1)	$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 18}{x - 3};$	2)	$f(x) = \frac{3x - 2x^5 + 3}{x};$
	3)	$f(x) = \frac{x^2}{\cos^2 x^3};$	4)	$f(x) = (x - 4) \ln x;$
	5)	$f(x) = \frac{7x - 22}{(x - 1)(x - 6)};$	6)	$f(x) = \cos^2 \frac{x}{6}.$
16.	1)	$f(x) = \frac{(x^2 - 16)x^2}{x + 4};$	2)	$f(x) = \frac{4x - 2x^3 + 5}{x^3};$
	3)	$f(x) = \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x};$	4)	$f(x) = x \arcsin x;$
	5)	$f(x) = \frac{9x - 20}{(x + 1)(x - 2)};$	6)	$f(x) = \cos^5 x.$
17.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + 9x - 10}{x + 10};$	2)	$f(x) = \frac{6x - 3x^4 + 2}{x};$
	3)	$f(x) = \frac{e^{tgx-4}}{\cos^2 x};$	4)	$f(x) = \frac{5x + 2}{\sin^2 x};$
	5)	$f(x) = \frac{11 - 4x}{(x - 3)^2(x + 1)};$	6)	$f(x) = \sin^3 x \cos^6 x.$
18.	1)	$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 4)}{x + 2};$	2)	$f(x) = \frac{15 \cdot 4^x + 4 \cdot 9^x}{6^x};$
	3)	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x};$	4)	$f(x) = x \sin \frac{x}{3};$
	5)	$f(x) = \frac{2 - 4x}{(x - 2)(x - 4)};$	6)	$f(x) = \cos 13x \sin 11x.$
19.	1)	$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x - 3};$	2)	$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 5}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{tgx + 7}{\cos^2 x};$	4)	$f(x) = (1 - 3x) \cos x;$
	5)	$f(x) = \frac{8x - 33}{(x + 6)(x - 3)};$	6)	$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x};$

20.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5};$	2)	$f(x) = \frac{3x^2 - 6x^6 + 7}{x^3};$
	3)	$f(x) = \frac{1}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1 - x^2}};$	4)	$f(x) = (9x - 5)e^x;$
	5)	$f(x) = \frac{4x + 32}{x^2 - 16};$	6)	$f(x) = \sin^2 \frac{x}{5};$
21.	1)	$f(x) = \frac{x(x^2 - 25)}{x - 5};$	2)	$f(x) = \frac{3x^4 - 2x + 1}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{x^3}{(6x^4 + 5)^5};$	4)	$f(x) = \frac{x}{3} \arctg x;$
	5)	$f(x) = \frac{9x - 58}{(x - 2)(x - 7)};$	6)	$f(x) = \sin^7 x.$
22.	1)	$f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8};$	2)	$f(x) = \frac{8 \cdot 4^x - 3 \cdot 121^x}{22^x};$
	3)	$f(x) = \frac{\arctg^2 x}{x^2 + 1};$	4)	$f(x) = \frac{4x - 1}{\cos^2 x};$
	5)	$f(x) = \frac{26x - 2}{(x + 2)(x - 3)};$	6)	$f(x) = \sin^2 8x.$
23.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2};$	2)	$f(x) = \frac{x - 2x^3 + 6}{x};$
	3)	$f(x) = \frac{1}{x \cdot \cos^2 \ln x};$	4)	$f(x) = x^3 \ln x;$
	5)	$f(x) = \frac{2x^2 + 13x + 32}{x(x + 4)^2};$	6)	$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}.$
24.	1)	$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 5};$	2)	$f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 4}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 7};$	4)	$f(x) = (1 + 2x)e^x;$
	5)	$f(x) = \frac{8x + 35}{(x - 8)(x + 1)};$	6)	$f(x) = \cos 5x \cos 4x.$

25.	1)	$f(x) = \frac{(x^2 - 100)x^2}{x + 10};$	2)	$f(x) = \frac{4x^5 + 3x^3 + 4x^2}{x^3};$
	3)	$f(x) = (x^4 + 2)^5 x^3;$	4)	$f(x) = \frac{x - 7}{\sin^2 x};$
	5)	$f(x) = \frac{13x + 22}{x^2(x + 11)};$	6)	$f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}.$
26.	1)	$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x + 1};$	2)	$f(x) = \frac{7x^6 - 2x^2 + 8}{x};$
	3)	$f(x) = \frac{x^2}{12 + x^3};$	4)	$f(x) = (3x - 4)e^x;$
	5)	$f(x) = \frac{67 - 5x}{(x + 2)(x - 9)}$	6)	$f(x) = \sin^5 x \cos^3 x.$
27.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1};$	2)	$f(x) = \frac{8 \cdot 25^x + 6 \cdot 36^x}{30^x};$
	3)	$f(x) = \frac{2 + 3^{\lg x}}{\cos^2 x};$	4)	$f(x) = (12x - 5)\sin x;$
	5)	$f(x) = \frac{3x + 3}{(x - 9)(x + 6)};$	6)	$f(x) = \sin^2 7x.$
28.	1)	$f(x) = \frac{(x^2 - 36)x^2}{x + 6};$	2)	$f(x) = \frac{4x^6 - 3x^3 - x}{x^2};$
	3)	$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 64};$	4)	$f(x) = (9x + 1)e^x;$
	5)	$f(x) = \frac{4x + 25}{(x + 1)^2(x - 6)};$	6)	$f(x) = \sin^3 x \cos^8 x.$
29.	1)	$f(x) = \frac{x^4 + 5x^2}{x + 5};$	2)	$f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x}{10^x};$
	3)	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\ln x - 9}}{x};$	4)	$f(x) = (11x + 5)\sin x;$
	5)	$f(x) = \frac{11 - 2x}{(x - 4)(x - 5)};$	6)	$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}.$

30.	1)	$f(x) = \frac{x^2 + 9x - 22}{x + 11};$	2)	$f(x) = \frac{2 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 2^{2x}}{6^x}.$
	3)	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{tg^2 x - 7}};$	4)	$f(x) = x \cos 7x;$
	5)	$f(x) = \frac{5x - 10}{(x + 4)(x - 11)};$	6)	$f(x) = \cos^2 10x.$

Завдання №2

Обчислити визначені інтеграли $\int_a^b f(x) dx$.

№ Варіанта	Вигляд функції $f(x)$		a	b
1.	1)	$f(x) = (4 - x)^3$	4	5
	2)	$f(x) = x \sin x$	0	$\frac{\pi}{2}$
2.	1)	$f(x) = \frac{1}{(3x + 1)^4}$	0	1
	2)	$f(x) = x \cos x$	0	$\frac{\pi}{2}$
3.	1)	$f(x) = \frac{\ln^8 x}{x}$	e	e^2
	2)	$f(x) = (2x + 1) \sin x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
4.	1)	$f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$	1	e
	2)	$f(x) = x \arccos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
5.	1)	$f(x) = \sqrt[3]{3x - 1}$	0	3
	2)	$f(x) = x^2 \ln x$	1	e

6.	1)	$f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$	1	5
	2)	$f(x) = xe^x$	0	2
7.	1)	$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
	2)	$f(x) = (x+1)\cos x$	0	$\frac{\pi}{2}$
8.	1)	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	1	$\sqrt{e}$
	2)	$f(x) = x\cos 2x$	0	$\frac{\pi}{4}$
9.	1)	$f(x) = \cos^3 x \sin x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
	2)	$f(x) = xe^{5x}$	0	2
10.	1)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$	2	5
	2)	$f(x) = (2x+3)e^{-2x}$	-1	0
11.	1)	$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{10}$	1	e
	2)	$f(x) = (x+2)\cos x$	0	$\frac{\pi}{2}$
12.	1)	$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}$	0	2
	2)	$f(x) = \ln(2x+3)$	1	2
13.	1)	$f(x) = (3x+1)^7$	0	1
	2)	$f(x) = x5^x$	0	2
14.	1)	$f(x) = \cos x \sin^3 x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
	2)	$f(x) = (x-3)e^x$	0	2

15.	1)	$f(x) = \frac{3 + \ln x}{x}$	1	e
	2)	$f(x) = \arcsin 5x$	0	$\frac{1}{5}$
16.	1)	$f(x) = \sqrt{4x+1}$	0	2
	2)	$f(x) = \frac{\ln x}{x^5}$	1	2
17.	1)	$f(x) = \frac{x^3}{1+x^8}$	0	1
	2)	$f(x) = (x-7)\sin 3x$	0	$\frac{\pi}{3}$
18.	1)	$f(x) = \sin 4x$	0	$\frac{\pi}{4}$
	2)	$f(x) = (x+4)\cos 6x$	0	$\frac{\pi}{6}$
19.	1)	$f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	$\frac{\pi^2}{9}$	π^2
	2)	$f(x) = (2-x)5^{-4x}$	0	1
20.	1)	$f(x) = xe^{2x}$	0	1
	2)	$f(x) = x \sin 3x$	0	$\frac{\pi}{2}$
21.	1)	$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$	$-\frac{\pi}{2}$	0
	2)	$f(x) = x^5 \ln x$	1	e
22.	1)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}$	1	3
	2)	$f(x) = (x^2-1)\ln x$	1	e^3
23.	1)	$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$

	2)	$f(x) = \arctg x$	0	1
24.	1)	$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$	1	e
	2)	$f(x) = \arctg 2x$	0	$\frac{1}{2}$
25.	1)	$f(x) = x^2 \sqrt{1+x^3}$	0	1
	2)	$f(x) = x^7 \ln 2x$	1	e
26.	1)	$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$	2	9
	2)	$f(x) = (1+3x)\sin x$	0	$\frac{\pi}{2}$
27.	1)	$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	1	4
	2)	$f(x) = (3+x)4^x$	0	1
28.	1)	$f(x) = \frac{(2+\tg x)^6}{\cos^2 x}$	0	$\frac{\pi}{4}$
	2)	$f(x) = (x-1)\cos x$	0	$\frac{\pi}{2}$
29.	1)	$f(x) = x\sqrt{1+4x^2}$	0	2
	2)	$f(x) = \ln x$	1	3
30.	1)	$f(x) = \frac{(1-\ln x)^{10}}{x}$	1	e^2
	2)	$f(x) = (2x-5)\cos x$	0	$\frac{\pi}{2}$

Завдання №3

Застосування визначеного інтегралу до задач геометрії

№ Варіанта	
1.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою

	$x + y - 6 = 0$.
2.	Обчислити об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $x = y^2$.
3.	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $xy = 1$ і прямою $x = 4$.
4.	Обчислити об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = \frac{x^2 + 1}{2}$.
5.	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $x = e$ і віссю абсцис.
6.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена параболою $y = 2 - x^2$ і $y = x^2$.
7.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = x + 2$.
8.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена лініями $y = x^3$ і $y = \sqrt{x}$.
9.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $x - y + 4 = 0$.
10.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, яка обмежена параболою $y = 3 - x^2$ і $y = x^2 + 1$.
11.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 - x^2 - 2x$ і віссю абсцис.
12.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена гіперболою $xy = 4$, прямими $x = 3$, $x = 12$ і віссю абсцис.
13.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 4x - 1$ і

	прямою $y = -x - 1$.
14.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, яка обмежена віссю абсцис і параболою $y = 2x - x^2$.
15.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 6x + 7$ і прямою $y = x + 1$.
16.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена параболою $y = \frac{1}{4}x^2$, прямою $x = 4$ і віссю Ox .
17.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 6x - 5$ і прямою $y = x - 5$.
18.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена гіперболою $y = \frac{6}{x}$, віссю Oy і прямими $y = 1$ і $y = 6$.
19.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 6x + 7$ і прямою $x + y - 7 = 0$.
20.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = x$.
21.	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{3}(x-1)^2$ і $y = x + 5$.
22.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис кривої $y = \sin x$ у проміжку $[0; \pi]$.
23.	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{3}(x-2)^2$ і

	$y = x + 4$.
24.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена лініями $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$.
25.	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 6x - 5$ і $y = -x + 1$.
26.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями $y^2 = 9x$ і $y = 3x$.
27.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 6x + 7$ і прямою $x - y + 7 = 0$.
28.	Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями $y = 2 - x^4$ і $y = x^2$.
29.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2$ і прямою $x - y + 3 = 0$.
30.	Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 - 6x - 5$ і прямою $y = x + 1$.

Завдання №4

Обчислити довжину дуги заданої лінії:

№ Варіанта	
1.	$y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$
2.	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$
3.	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$
4.	$y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

5.	$y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
6.	$y = 2 + \sqrt{x - x^2}, \frac{3}{4} \geq x \geq \frac{1}{4}$
7.	$y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$
8.	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$
9.	$y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$
10.	$y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$
11.	$y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
12.	$y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$
13.	$y = 2 - \sqrt{x - x^2}, \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$
14.	$y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$
15.	$y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$
16.	$y = 21 - \ln \cos x, \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
17.	$y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4$
18.	$y = 5 + \ln \sin x, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$
19.	$y = \sqrt{1 - x^2} - \arccos x + 1$
20.	$y = \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
21.	$y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
22.	$y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$
23.	$y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

24.	$y = e^x + 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$
25.	$y = -\sqrt{x-x^2} + 4, 0 \leq x \leq \frac{3}{4}$
26.	$y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 3), 0 \leq x \leq 2$
27.	$y = e^x + e, \ln \sqrt{x} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$
28.	$y = \frac{1}{2}(1 - e^x - e^{-x}), 0 \leq x \leq 3$
29.	$y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
30.	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, 0 \leq x \leq 2$

Завдання №5

Дослідити на збіжність невластний інтеграл:

№ Варіанта		№ Варіанта	
1.	$\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$	16.	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x - 1}$
2.	$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4}$	17.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}}$
3.	$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$	18.	$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$
4.	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$	19.	$\int_{-2}^0 \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$
5.	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$	20.	$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
6.	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 3x + 4}$	21.	$\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

7.	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$	22.	$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$
8.	$\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$	23.	$\int_1^{\infty} xe^{-2x^2} dx$
9.	$\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$	24.	$\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$
10.	$\int_3^4 \frac{2dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$	25.	$\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$
11.	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 9}$	26.	$\int_1^3 \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$
12.	$\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^3}$	27.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$
13.	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 5x + 10}$	28.	$\int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt[5]{(1-x)^3}}$
14.	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln^3 x}}$	29.	$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^6}$
15.	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 3}$	30.	$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[6]{(3-x)^7}}$

Завдання №6

Для заданої функції двох змінних $z = f(x, y)$ знайти:

- 1) повний диференціал першого порядку функції двох змінних;
- 2) диференціал другого порядку функції двох змінних.

№ Варіанта	$z = f(x, y)$	№ Варіанта	$z = f(x, y)$
1.	$z = \ln(x^2 + y^2)$	16.	$z = e^x(y^2 + x^2)$
2.	$z = \ln x \cdot \ln y + x$	17.	$z = x^5 y + 3xy^2 + xe^y$
3.	$z = x^3 \cos y - y^2$	18.	$z = x\sqrt{y} + \cos(xy)$

4.	$z = x \ln y + x^3 y^2 + 2y$	19.	$z = x^2 \sqrt{y} + y e^{2x} + 2y$
5.	$z = y^2 \sin x - xy^3$	20.	$z = e^{x+y} \cos 2x$
6.	$z = xy^6 + x^3 y - y e^x$	21.	$z = \ln(xy) + 4x^2 y^3 + 4$
7.	$z = e^{xy} + 5xy^2 + y^3$	22.	$z = y\sqrt{x} - 2xy + 3$
8.	$z = x^2 \sin y + 2xy^2$	23.	$z = x^2 y^2 - y^3 - y \ln x$
9.	$z = 3x^2 y^3 + 12xy - e^y$	24.	$z = \cos(xy) - x + 3y$
10.	$z = x^3 y - 3xy^3 + x e^y$	25.	$z = \ln(x - y)$
11.	$z = 12x^2 y - 3xy^3 + e^y$	26.	$z = x e^y - y^3 + \cos 2x$
12.	$z = (y^2 + 1)e^x$	27.	$z = x^2 e^{x+y}$
13.	$z = x \ln y - 3xy + 4$	28.	$z = 2xy^2 - \sqrt{y} - \cos x$
14.	$z = x^3 - y^2 + y e^x$	29.	$y = \sin(xy) + y^2 + 3x$
15.	$z = 2x^2 - y^2 \ln x$	30.	$z = e^{x+2y} \sin y$

Завдання №7

Задано функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$, точку M і вектор $\vec{l}$.

- 1) Визначити похідну функції $u = f(x, y, z)$ у точці M за напрямком вектора $\vec{l}$;
- 2) Визначити градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці M .

№ Варіанта	$u = f(x, y, z)$	M	$\vec{l}$
1.	$u = x^2 + xy + y^2 z$	$M(1; 0; 1)$	$\vec{l}(2; 1; 2)$
2.	$u = \frac{x^3}{z} - xy^2 - y^3$	$M(2; 1; 1)$	$\vec{l}(-3; 1; 1)$
3.	$u = \ln(5x^2 + 3y^2 + z^2)$	$M(1; -1; 1)$	$\vec{l}(3; 2; 1)$
4.	$u = 5x^2 + 6xy + xz$	$M(2; 1; 3)$	$\vec{l}(1; 2; 0)$

5.	$u = \arctg(xy^2z)$	$M(2;3;1)$	$\vec{l}(-4;3;1)$
6.	$u = \ln(3x^2 + 4y^2 + 4z^2)$	$M(1;3;0)$	$\vec{l}(2;-1;1)$
7.	$u = 3x^4 + 2x^2y^3 + z^3$	$M(0;1;2)$	$\vec{l}(4;-3;0)$
8.	$u = xy + y + z$	$M(1;-3;1)$	$\vec{l}(6;-1;1)$
9.	$u = x^2z + 6xy + y^2z^2$	$M(4;-12;3)$	$\vec{l}(1;1;1)$
10.	$u = \arcsin\left(\frac{x^2}{yz}\right),$	$M(1;2;-1)$	$\vec{l}(5;-12;1)$
11.	$u = x^3 + 3x^2z^2 + y^2z$	$M(1;-1;1)$	$\vec{l}(4;3;1)$
12.	$u = \arctg \frac{yz}{x}$	$M(2;-2;1)$	$\vec{l}(3;-5;0)$
13.	$u = xy^2z + 6y^3 + 3z^2$	$M(4;-5;1)$	$\vec{l}(3;-2;1)$
14.	$u = x^2 + xyz^2 + y^3z$	$M(0;1;3)$	$\vec{l}(2;2;-1)$
15.	$u = x^2yz + y - z^3$	$M(1;1;-3)$	$\vec{l}(1;-3;3)$
16.	$u = \ln(5x^2 + 4y^2 + 5z^2)$	$M(0;1;-1)$	$\vec{l}(2;-1;1)$
17.	$u = x^2z + xy - \frac{y^2}{z}$	$M(4;-4;3)$	$\vec{l}(3;-3;3)$
18.	$u = 2xy + 3y - z^3$	$M(1;0;1)$	$\vec{l}(2;-1;0)$
19.	$u = y^2z - xy - x + \frac{1}{z}$	$M(-2;0;2)$	$\vec{l}(0;1;-4)$
20.	$u = x^2 + 2yz - xy + 4z^2$	$M(3;4;-1)$	$\vec{l}(3;1;-1)$
21.	$u = x^2y + x^2z - 2z^4$	$M(1;0;-1)$	$\vec{l}(1;-1;2)$
22.	$u = \ln(3x^2 + y^2 + z)$	$M(1;0;-2)$	$\vec{l}(2;-1;3)$
23.	$u = xz^3 - x^2y + xyz$	$M(3;-1;1)$	$\vec{l}(1;0;1)$
24.	$u = x^3 + xy^2z + \frac{y^2}{z}$	$M(2;1;1)$	$\vec{l}(2;4;1)$

25.	$u = x^3 - 3xyz^2 - y^3z$	$M(2;1;-1)$	$\vec{l}(3;4;1)$
26.	$u = 2x^2y - xyz + 3yz^4$	$M(1;2;0)$	$\vec{l}(3;4;0)$
27.	$u = x^2z - 2y + y^2z^2$	$M(2;1;3)$	$\vec{l}(4;1;-1)$
28.	$u = xz + 2xy + yz^3$	$M(1;-1;2)$	$\vec{l}(1;2;1)$
29.	$u = 3x^2 + xy^3 - 5yz$	$M(1;0;-1)$	$\vec{l}(3;-1;2)$
30.	$u = \ln(x^2 + 6xyz + 3y^3)$	$M(3;0;-1)$	$\vec{l}(0;1;-1)$

Завдання №8

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в указаній точці:

№ Варіанта	$F(x, y, z) = 0$	P
1.	$x^2 + y^2 - z = 0$	$P(1;2;5)$
2.	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 2z = 0$	$P(3;-2;-1)$
3.	$x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0$	$P(3;4;12)$
4.	$3x^2y^2 - z^2y = 0$	$P(1;-1;1)$
5.	$y^2 + \ln\left(\frac{x}{y}\right) - z = 0$	$P(1;1;1)$
6.	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} - 1 = 0$	$P(5;-4;3)$
7.	$x^3 + 2y^2 - z^4 - 9 = 0$	$P(1;-2;2)$
8.	$2x^2 + 4y^2 - z = 0$	$P(2;1;12)$
9.	$\frac{1}{4}x^4 + y^2 - xz = 0$	$P(3;-4;5)$
10.	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 2z = 0$	$P(4;0;-3)$
11.	$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} + 1 = 0$	$P(3;-2;-1)$

12.	$x^3 - 4y^3 + 2z^3 - 6 = 0$	$P(2;2;3)$
13.	$z^2 - xy = 0$	$P(1;1;-1)$
14.	$x^2y^2 + 2x + z^2 + 41 = 0$	$P(2;3;1)$
15.	$3x^3y^2 - zy^2 = 0$	$P(1;-1;-1)$
16.	$xyz - 8 = 0$	$P(3;1;4)$
17.	$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$	$P(-3;2;1)$
18.	$3x^2y - y + z^2 + 4 = 0$	$P(1;-1;2)$
19.	$x^2 + y^2 - 2e^z = 0$	$P(1;-1;0)$
20.	$4xy^2 - yz - 3z = 0$	$P(2;-2;1)$
21.	$x^2 + y^2 - 17z^2 = 0$	$P(1;2;-1)$
22.	$x^2 + y^3 - 4z = 0$	$P(-2;1;0)$
23.	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} + 1 = 0$	$P(4;-3;3)$
24.	$x - (y+1)^2 + z^2 - 3 = 0$	$P(3;1;2)$
25.	$(x-5)^2 + 2y^2 - z^4 + 1 = 0$	$P(3;1;1)$
26.	$x^4 + y^2 - xz - 2 = 0$	$P(-1;2;3)$
27.	$3x^2 - 2y^2z^4 + 2z = 0$	$P(1;1;2)$
28.	$x^2y + yz = 0$	$P(2;-2;1)$
29.	$xy - z^2 = 0$	$P(-2;1;4)$
30.	$x^3 + 2y^3 - z^2 - 4 = 0$	$P(-1;1;3)$

Завдання №9

Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

№ Варіанта	$z = f(x, y)$	№ Варіанта	$z = f(x, y)$
---------------	---------------	---------------	---------------

1.	$z = 3x^2y - y^3 - 18x - 30y$	16.	$z = x^4 + 4xy - 2y^2$
2.	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$	17.	$z = x^2 - 4x - 2y^2 + 4$
3.	$z = x^3 + xy^2 + 6xy$	18.	$x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
4.	$z = x\sqrt{y} + x^2 - y + 6x + 3$	19.	$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$
5.	$z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$	20.	$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
6.	$z = (x - 1)^2 + 2y^2$	21.	$z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$
7.	$z = (x - 1)^2 - 2y^2$	22.	$z = x^4 + y^4 + 2x^2 + y^2 - 8x - 8y$
8.	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	23.	$z = (x - 1)^2 + 4y^2$
9.	$z = x^3y^2(6 - x - y)$	24.	$z = x^3 + y^2 - 3xy$
10.	$z = x^2 + xy + y^2 - x - y$	25.	$z = x^2 + (y^2 - 1)^2$
11.	$z = x^2 - xy + y^2 + 3x$	26.	$z = x^3 + 3x + 4xy$
12.	$z = 4x^2 + y^2 - 4x + 3y + 1$	27.	$z = x^2 + (y - 3)^2$
13.	$z = (x - 2)^2 - 2y^2$	28.	$z = 3x - x^2 - y^2$
14.	$z = 3x^3 + y^3 - 12x + 6$	29.	$z = (1 - x - y)xy$
15.	$z = x^2 + 5y^3 - 6x + 15y + 4$	30.	$z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 8$

Завдання №10

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

- 1) Диференціальне рівняння першого з відокремлюваними змінними.
- 2) Однорідне диференціальне рівняння першого порядку.
- 3) Лінійне диференціальне рівняння першого порядку.
- 4) Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

№ Варіанта	
1.	1) $ydx - (4 + x^2) \ln y dy = 0;$

	2) $2xyy' = x^2 + y^2;$ 3) $y' - y \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x;$ 4) $y'' + 6y' + 13y = \cos 3x.$
2.	1) $y(1 + x^2)y' = 1 + y^2;$ 2) $y' = \frac{3y - x}{x + y};$ 3) $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x;$ 4) $y'' - 3y' + 2y = 1 - 2x.$
3.	1) $y' \sin x = y \ln y;$ 2) $y^2 + x^2 y' = xy;$ 3) $y' + \frac{x}{1 + x^2} y = \frac{1}{1 + x^2};$ 4) $y'' + 2y' = 4e^x.$
4.	1) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = -1;$ 2) $\left(x \operatorname{ctg} \frac{y}{x} - y \right) dx + x dy = 0;$ 3) $y' + 2y = e^{3x};$ 4) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6.$
5.	1) $\sin^2 x \cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0;$ 2) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y';$ 3) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^{-x^2}}{x};$ 4) $y'' - 2y' + 2y = x^2.$
6.	1) $y' = x^2 \sin y;$ 2) $y' = \frac{xy + y^2}{x^2};$

	3) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$; 4) $y'' - 5y' = \sin 5x$.
7.	1) $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tgy}$; 2) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$; 3) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$; 4) $y'' - 2y' + y = x^2 + x - 3$.
8.	1) $y'(x + \sqrt{x}) = \sqrt{1-y}$; 2) $xy' = 5y + x$; 3) $y' + y \operatorname{tg} x = x \cos x$; 4) $y'' + 8y' + 16y = -17 \cos x$.
9.	1) $(x+2)(y^2+1)dx + y^2(1-x^2)dy = 0$; 2) $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{\frac{x}{y}}$; 3) $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$; 4) $y'' - y = 2e^{3x}$.
10.	1) $y' = (y+1)\operatorname{tg} x$; 2) $(4x^2 - 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$; 3) $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}}$; 4) $y'' - 4y' - 5y = \sin x$.
11.	1) $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$; 2) $y' = \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}$;

	3) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x;$ 4) $y'' + y = 2 \cos x.$
12.	1) $x^2 y^2 y' + 1 = y, \quad y(1) = 2;$ 2) $xydx - (2y^2 + x^2)dy = 0;$ 3) $y' - \frac{3y}{x} = \frac{x+1}{x};$ 4) $y'' - 2y' = x^2 + 1.$
13.	1) $yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0;$ 2) $(2x - 3y)dx + xdy = 0;$ 3) $y' + y = e^x;$ 4) $y'' + 2y' - 8y = \sin x.$
14.	1) $y' = (y+1)ctgx;$ 2) $y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0;$ 3) $(4 + x^2)y' + xy = 1;$ 4) $y'' - y' = 2(1+x).$
15.	1) $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2dy = 0;$ 2) $y - xy' = y \ln \frac{x}{y};$ 3) $xy' - \frac{y}{x+1} = x;$ 4) $y'' + 6y' + 9y = 3x + 11.$
16.	1) $(1 + e^x)yy' = e^x;$ 2) $(5\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0;$ 3) $x \ln x \cdot y' + y = 5x;$

	4) $y'' - 2y' + 2y = 4\cos x.$
17.	1) $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0;$ 2) $y - 2x = y'(x + 2y);$ 3) $y' + y\cos x = e^{-\sin x};$ 4) $y'' - 4y' + 4y = 8x^2 + 5.$
18.	1) $y'\cos x = \frac{y}{\ln y};$ 2) $y' = \frac{9x^2 + y^2 + xy}{x^2};$ 3) $y' - \frac{2y}{x} = -\frac{3}{x^2};$ 4) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$
19.	1) $ydx + ctgxdy = 0;$ 2) $(x^2 - xy)y' = -y^2;$ 3) $y' + \frac{y}{x} = x^2;$ 4) $y'' - 8y' = 10\cos x.$
20.	1) $y' = x(y^2 + 2y);$ 2) $xdy - (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = 0;$ 3) $y' + 2y = 4x;$ 4) $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1.$
21.	1) $x + xy + y'(y + xy) = 0;$ 2) $xy' = y + x^x\sqrt{e^y};$ 3) $y' + \frac{4x}{x^2 + 1}y = \frac{1}{(x^2 + 1)^3};$ 4) $y'' + 3y' - 10y = 3 - 4x.$

22.	1) $y' = (2y + 1) \operatorname{ctgx} ;$ 2) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0;$ 3) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^6 + 1};$ 4) $y'' + 4y' + 3y = x^2 + 1.$
23.	1) $y' \sin x = y \ln y \cos x ;$ 2) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};$ 3) $y' - \frac{xy}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2};$ 4) $y'' + 4y = 2 \sin 2x .$
24.	1) $x^2 y' + y^2 = 0 ;$ 2) $y' + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0;$ 3) $y' - y \operatorname{ctgx} = \sin x ;$ 4) $9y'' - 12y' + 4y = 6 \sin x .$
25.	1) $(x^2 + x)y' = 2y + 1 ;$ 2) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2;$ 3) $xy' - \frac{2y}{\ln x} = 1;$ 4) $y'' + 3y' = 6 - x .$
26.	1) $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx ;$ 2) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0;$ 3) $x^2 y' + 2xy - 1 = 0;$ 4) $y'' - 4y' + 4y = 3 \sin 2x .$
27.	1) $y' = 2\sqrt{y} \ln x ;$

	2) $2y' = 1 + \frac{y^2}{x^2};$ 3) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x;$ 4) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}.$
28.	1) $(1 - x^2)dy + 2x\sqrt[3]{y}dx = 0;$ 2) $yy' = 2y - x;$ 3) $y' + x^2y = x^2;$ 4) $y'' + 8y' + 25y = \cos x.$
29.	1) $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy;$ 2) $xy' = y + (x + y)\ln \frac{x + y}{x};$ 3) $y' + \frac{2}{x \ln x}y = \frac{1}{x};$ 4) $y'' - 4y' = 6x^2 + 1.$
30.	1) $\operatorname{tg} y dx - x \ln x dy = 0;$ 2) $(y - \sqrt{xy})dx = xdy;$ 3) $y'x \ln x + y = 2 \ln x;$ 4) $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x.$

3. Зразок виконання контрольної роботи №2

Завдання №1

1) Знайти інтеграл $\int \frac{x^4 - 25x^2}{x-5} dx$.

Розв'язання. Маємо $\int \frac{x^4 - 25x^2}{x-5} dx = \int \frac{x^2(x^2 - 25)}{x-5} dx = \int \frac{x^2(x-5)(x+5)}{x-5} dx =$
 $= \int x^2(x+5) dx = \int (x^3 + 5x^2) dx = \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + C$.

2) Знайти інтеграл $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$.

Розв'язання. Маємо

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{3x^2}{x} + \frac{4x}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx + 4 \int dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + C.$$

3.1) Знайти інтеграл $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\arcsin^4 x}{4} + C.$$

3.2) Знайти інтеграл: $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^5 x}}{x} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln^5 x}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \sqrt[3]{t^5} dt = \int t^{\frac{5}{3}} dt = \frac{3t^{\frac{8}{3}}}{8} + C = \frac{3\sqrt[3]{t^8}}{8} + C = \frac{3\sqrt[3]{\ln^8 x}}{8} + C.$$

3.3) Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^3}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2} \int t^{-3} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4t^2} + C = -\frac{1}{4(x^2 + 1)^2} + C.$$

4.1) Знайти інтеграл $\int (x + 4)e^x dx$.

Розв'язання.

$$\int (x + 4)e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x + 4 & dv = e^x dx \\ du = dx & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = (x + 4)e^x - \int e^x dx = (x + 4)e^x - e^x + C.$$

4.2) Знайти інтеграл $\int \ln(x^2 + 3) dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 3) dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x^2 + 3) & dv = dx \\ du = \frac{2x dx}{x^2 + 3} & v = \int dx = x \end{array} \right| = x \ln(x^2 + 3) - 2 \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 3} = \\ &= x \ln(x^2 + 3) - 2 \int \frac{x^2 + 3 - 3}{x^2 + 3} dx = x \ln(x^2 + 3) - 2 \int \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} - \frac{3}{x^2 + 3} \right) dx = \\ &= x \ln(x^2 + 3) - 2 \int \left(1 - \frac{3}{x^2 + 3} \right) dx = x \ln(x^2 + 3) - 2 \int dx + 6 \int \frac{dx}{x^2 + 3} = \\ &= x \ln(x^2 + 3) - 2x + \frac{6}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

4.3) Знайти інтеграл $\int (4 - 5x) \sin 6x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int (4 - 5x) \sin 6x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = 4 - 5x & dv = \sin 6x dx \\ du = -5 dx & v = \int \sin 6x dx = -\frac{1}{6} \cos 6x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{6} (4 - 5x) \cos 6x - \int \frac{5}{6} \cos 6x dx = -\frac{1}{6} (4 - 5x) \cos 6x - \frac{5}{6} \int \cos 6x dx = \\ &= -\frac{1}{6} (4 - 5x) \cos 6x - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + C = -\frac{1}{6} (4 - 5x) \cos 6x - \frac{5}{36} \sin 6x + C. \end{aligned}$$

4.4) Знайти інтеграл $\int \frac{(6-2x)dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{(6-2x)dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{ll} u = 6-2x & dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ du = -2dx & v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = (6-2x)\operatorname{tg} x + 2 \int \operatorname{tg} x dx =$$

$$= (6-2x)\operatorname{tg} x - 2 \ln |\cos x| + C.$$

4.5) Знайти інтеграл $\int (x+6) \sin \frac{x}{3} dx$.

Розв'язання.

$$\int (x+6) \sin \frac{x}{3} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+6 & dv = \sin \frac{x}{3} dx \\ du = dx & v = \int \sin \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{x}{3} \end{array} \right| = -3(x+6) \cos \frac{x}{3} + 3 \int \cos \frac{x}{3} dx =$$

$$= -3(x+6) \cos \frac{x}{3} + 3 \cdot 3 \sin \frac{x}{3} = -3(x+6) \cos \frac{x}{3} + 9 \sin \frac{x}{3} + C.$$

4.6) Знайти інтеграл $\int \arctg 2x dx$.

Розв'язання.

$$\int \arctg 2x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arctg 2x & dv = dx \\ du = \frac{2dx}{1+4x^2} & v = \int dx = x \end{array} \right| = x \arctg 2x - \int \frac{2x dx}{1+4x^2} =$$

$$= x \arctg x - \frac{1}{4} \ln |1+4x^2| + C.$$

$$\int \frac{2x dx}{1+4x^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1+4x^2 \\ dt = 8x dx \\ 2x dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln |1+4x^2| + C.$$

5.1) Знайти інтеграл $\int \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} dx$.

Розв'язання.

1) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6}$ – неправильний дріб. Тому виділимо його цілу частину:

$$\begin{array}{r} -x^3 \quad -x \quad \Big| \quad x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^3 - 5x^2 + 6x} \\ 5x^2 - 7x \\ \underline{5x^2 - 25x + 30} \\ 18x - 30 \end{array}$$

Отже, $\frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{18x - 30}{x^2 - 5x + 6}$ і дріб $\frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)} = \frac{18x - 30}{x^2 - 5x + 6}$ – правильний і нескоротний.

2) Розкладемо знаменник $x^2 - 5x + 6$ на множники: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

3) Множнику $(x - 2)$ відповідає елементарний дріб $\frac{A}{x - 2}$, а множнику $(x - 3)$ – дріб $\frac{B}{x - 3}$.

$$4) \frac{18x - 30}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

5) I сп.

$$x = 2 \Rightarrow 18 \cdot 2 - 30 = A \cdot (-1) \Rightarrow A = -6,$$

$$x = 3 \Rightarrow 18 \cdot 3 - 30 = B \cdot 1 \Rightarrow B = 24.$$

II сп.

$$18x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2),$$

$$18x - 30 = Ax - 3A + Bx - 2B$$

$$x \quad \Big| \quad 18 = A + B,$$

$$x^0 \quad \Big| \quad -30 = -3A - 2B.$$

$$\begin{cases} A + B = 18, \\ 3A + 2B = 30, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 18 - A, \\ 3A + 36 - 2A = 30, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 18 - A, \\ A = -6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 24, \\ A = -6. \end{cases}$$

6) Отже, $\frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{-6}{x-2} + \frac{24}{x-3}$.

7) $\int \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left(x + 5 - \frac{6}{x-2} + \frac{24}{x-3} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 6 \ln|x-2| + 24 \ln|x-3| + C$.

5.2) Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 - 12x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx$.

Розв'язання.

1) $f(x) = \frac{x^2 - 12x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)}$ – правильний дріб.

2) Знаменник розкладений на множники.

3) Множнику $(x+2)^2$ відповідають два елементарних дроби $\frac{A}{x+2}$ та $\frac{B}{(x+2)^2}$, а

множнику $(x^2 + 4)$ – дріб $\frac{Cx + D}{x^2 + 4}$.

$$\begin{aligned} 4) \frac{x^2 - 12x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} = \\ &= \frac{A(x+2)(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2 + 4)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 4 = A(x+2)(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)(x+2)^2$$

5) $x^2 - 12x + 4 = Ax^3 + 2Ax^2 + 4Ax + 8A + Bx^2 + 4B + Cx^3 + 4Cx^2 + 4Cx + Dx^2 + 4Dx + 4D$.

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = A + C, \\ x^2 & 1 = 2A + B + 4C + D, \\ x & -12 = 4A + 4C + 4D, \\ x^0 & 4 = 8A + 4B + 4D. \end{array}$$

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ 2A + B + 4C + D = 1, \\ 4A + 4C + 4D = -12, \\ 8A + 4B + 4D = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A, \\ 2A + B - 4A + D = 1, \\ 4A - 4A + 4D = -12, \\ 8A + 4B + 4D = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A, \\ -2A + B + D = 1, \\ 4D = -12, \\ 8A + 4B + 4D = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -A, \\ -2A + B - 3 = 1, \\ D = -3, \\ 8A + 4B - 12 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A, \\ -2A + B = 4, \\ D = -3, \\ 8A + 4B = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A, \\ B = 4 + 2A, \\ D = -3, \\ 8A + 4B = 16, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C = -A, \\ B = 4 + 2A, \\ D = -3, \\ 8A + 16 + 8A = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A, \\ B = 4 + 2A, \\ D = -3, \\ A = 0, \end{cases} \begin{cases} C = 0, \\ B = 4, \\ D = -3, \\ A = 0. \end{cases}$$

6) Отже, $\frac{x^2 - 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} = \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{-3}{x^2+4}$

7) $\int \frac{x^2 - 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{4}{(x+2)^2} + \frac{-3}{x^2+4} \right) dx = 4 \int \frac{dx}{(x-2)^2} - 3 \int \frac{dx}{x^2+4} =$

$$= -\frac{4}{x-2} - \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} + C.$$

$$4 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \left| \frac{t = x-2}{dt = dx} \right| = 4 \int \frac{dt}{t^2} = 4 \int t^{-2} dt = 4 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{4}{t} + C = -\frac{4}{x-2} + C.$$

6.1) Знайти інтеграл $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx = \\ &= \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2)^2 t^2 dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4) t^2 dt = -\int t^2 dt + 2 \int t^4 dt - \int t^6 dt = \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

6.2) Знайти інтеграл $\int \sin^2 7x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 7x dx &= \int \frac{1 - \cos 14x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 14x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 14x dx = \frac{x}{2} - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{14} \sin 14x + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{28} \sin 14x + C. \end{aligned}$$

6.3) Знайти інтеграли $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos 2x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin(3x - 2x) + \sin(3x + 2x)) dx = \frac{1}{2} \int (\sin x + \sin 5x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x dx = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cos 5x + C = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.\end{aligned}$$

Завдання №2

1) Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$.

Розв'язання

$$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ dt = e^x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} x|0|1 \\ t|0|e-1 \end{array} = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5} - \frac{0}{5} = \frac{(e-1)^5}{5}.$$

2) Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi/4} (1 - 4x) \cos x dx$.

Розв'язання

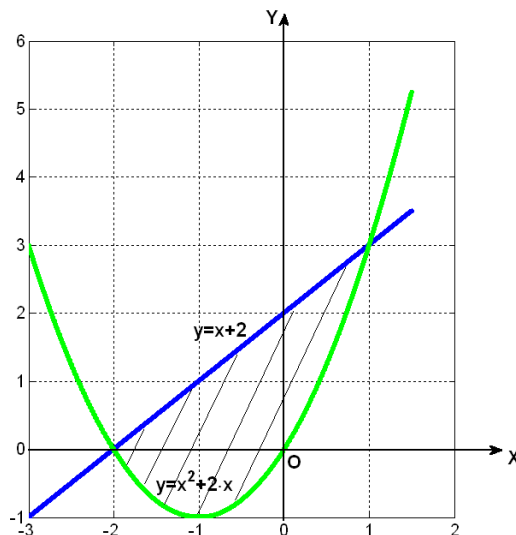
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} (1 - 4x) \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 1 - 4x \\ du = -4dx \end{array} \right| \begin{array}{l} dv = \cos x dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} = (1 - 4x) \sin x \Big|_0^{\pi/4} + \\ &+ 4 \int_0^{\pi/4} \sin x dx = (1 - 4x) \sin x \Big|_0^{\pi/4} - \cos x \Big|_0^{\pi/4} = (1 - \pi) \sin \frac{\pi}{4} - 0 - 4(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \pi) - 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \frac{4\sqrt{2}}{2} + 4 = 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.\end{aligned}$$

Завдання №3

1) Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями: $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину відповідних параболи і прямої:



$$x^2 + 2x = x + 2, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

За формулою $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$, маємо: $S = \int_{-2}^1 [(x+2) - (x^2 + 2x)] dx =$

$$= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 4,5 \text{ кв. од.}$$

2) Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями: $y = 2x^2$, $y + x = 3$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину параболи $y = 2x^2$ та прямої $y + x = 3$:

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = -x + 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -3/2. \end{cases}$$

Другий розв'язок не задовольняє умови задачі. Далі міркуємо і діємо аналогічно до попереднього прикладу, враховуючи лишень, що обертання відбувається навколо осі Ox . Тому застосуємо формулу

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Шуканий об'єм:

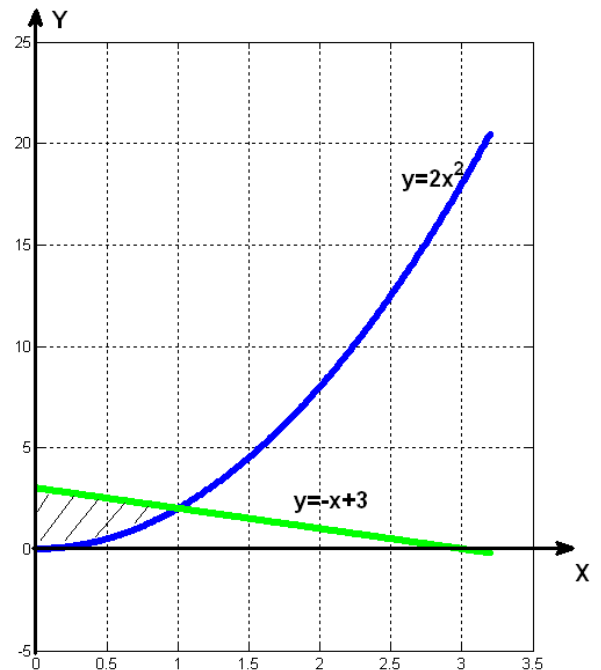
$$V_x = \pi \int_0^1 (-x+3)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x^2)^2 dx = \frac{83\pi}{15} \text{ куб. од.}$$

Завдання №4

Знайти довжину дуги кривої $y = 1 + \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання

Довжина дуги кривої, заданої в декартових координатах, обчислюється за



формулою $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Маємо:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}}{\sin x} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Використаємо підстановку $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $dz = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$.

$$l = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{1/\sqrt{3}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

Завдання №5

1.1) Обчислити невластний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2x^2 + 1}.$$

Розв'язання

Застосуємо метод заміни змінної та візьмемо до уваги наведене вище означення невластного інтегралу на нескінченному проміжку $[a; +\infty]$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2x^2 + 1} &= \left. \begin{array}{l} t = 2x^2 + 1 \\ dt = 4x dx \\ x dx = \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} dt \end{array} \right|_{\substack{x|0|+\infty \\ t|1|+\infty}} = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \int_1^b \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln t \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = \frac{1}{4} \cdot (+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Заданий інтеграл розбігається, оскільки ми отримали нескінченну границю.

1.2) Обчислити невластний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

Розв'язання

На відрізку $[-1;1]$ існує точка $x=0$, в якій підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

має розрив, то скористаємось вищезазначеним та запишемо заданий інтеграл у вигляді суми таких інтегралів:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

З'ясуємо питання збіжності для кожного з них окремо:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{4}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. x^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{-\frac{1}{3}} \right|_{-1}^{0-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right|_{-1}^{0-\varepsilon} = -\infty,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = -\infty.$$

Отже, даний інтеграл розбігається.

Завдання №6

Для заданої функції двох змінних $z = e^y \cos(x - y)$ знайти:

- 1) повний диференціал першого порядку функції двох змінних;
- 2) диференціал другого порядку функції двох змінних.

Розв'язання

1) повний диференціал першого порядку функції двох змінних шукаємо у вигляді:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^y \sin(x - y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^y \cos(x - y) + e^y \sin(x - y);$$

Тоді $dz = -e^y \sin(x-y)dx + (e^y \cos(x-y) + e^y \sin(x-y))dy$.

2) Диференціал другого порядку функції двох змінних шукаємо у вигляді:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^y \cos(x-y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y \cos(x-y) + e^y \sin(x-y) + e^y \sin(x-y) - e^y \cos(x-y) = 2e^y \sin(x-y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^y \sin(x-y) - e^y \cos(x-y) = e^y (\cos(x-y) - \sin(x-y)).$$

Тоді повний диференціал другого порядку можна записати:

$$d^2z = -e^y \cos(x-y)dx^2 + 4e^y (\cos(x-y) - \sin(x-y))dx dy + 2e^y \sin(x-y)dy^2.$$

Завдання №7

Задано функцію трьох змінних $u = xy^2z^3$, точку $M(3;2;1)$ і вектор $\vec{l}(2;2;1)$.

1) Визначити похідну функції $u = f(x, y, z)$ у точці M за напрямком вектора $\vec{l}$;

2) Визначити градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці M .

Розв'язання.

1) Похідна від функції u в точці M за напрямком $\vec{l}$ обчислюється за формулою:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cos \gamma.$$

Знайдемо довжину та напрямні косинуси вектора $\vec{l}$

$$|\vec{l}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}.$$

Тепер знайдемо частинні похідні функції

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2.$$

Їх значення у точці $M(3;2;1)$ відповідно дорівнюють:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 12, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 36.$$

Підставляючи у формулу знайдені значення частинних похідних і напрямних косинусів, одержимо шукану похідну

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = \frac{68}{3}.$$

2) Градієнт функції u в точці M знаходять за формулою:

$$\overline{grad} u \Big|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \vec{k}.$$

Тоді маємо

$$\overline{grad} u \Big|_M = 4 \vec{i} + 12 \vec{j} + 36 \vec{k}.$$

Завдання №8.

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ в точці $P(2;1;-3)$.

Розв'язання

Запишемо рівняння площини у вигляді $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x, y, z)$, Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці P_0 :

$$F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_P = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -8y, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_P = -8, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4z, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_P = -12.$$

Тоді рівняння дотичної площини можна записати:

$$4(x - 2) - 8(y - 1) - 12(z + 3) = 0, \text{ або } 4x - 8y - 12z - 36 = 0,$$

$$\text{або } x - 2y - 3z - 9 = 0.$$

А рівняння нормалі має такий вигляд:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z+3}{-12} \text{ або } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{-3}.$$

Завдання №9.

Дослідити на екстремум функції $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12,$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = \frac{2}{x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему і знайдемо стаціонарні точки:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0, \quad \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2} = 0, \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \quad x^2_1 = 4, \quad x^2_2 = 1.$$

$$x_{1,2} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \pm 1, \quad x_{3,4} = \pm 1, \quad y_{3,4} = \pm 2.$$

Стаціонарні точки: $P_1(2;1)$, $P_2(-2;-1)$, $P_3(1;2)$, $P_4(-1;-2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

$$\text{Знайдемо } \Delta = AC - B^2 = 36x^2 - 36y^2.$$

Тепер для кожної стаціонарної точки будемо знаходити знак $\Delta = AC - B^2$:

1) для точки $P_1(2;1)$: $\Delta = AC - B^2 = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1 = 108 > 0$,
 $A = 6x = 6 \cdot 2 = 12 > 0$, отже точка $P_1(2;1)$ – точка мінімуму.

2) для точки $P_2(-2;-1)$: $\Delta = AC - B^2 = 36 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot (-1) = 180 > 0$,
 $A = 6x = 6 \cdot (-2) = -12 < 0$, отже точка $P_2(-2;-1)$ – точка максимуму.

3) для точки $P_3(1;2)$: $\Delta = AC - B^2 = 36 \cdot 1^2 - 36 \cdot 2 = -36 < 0$, отже точка $P_3(1;2)$ екстремуму немає.

4) для точки $P_4(-1;-2)$: $\Delta = AC - B^2 = 36 \cdot (-1)^2 - 36 \cdot (-2) = 108 > 0$,
 $A = 6x = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, отже точка $P_4(-1;-2)$ – точка максимуму.

Завдання №10.

1) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x(1 + y^2)dx = ydy.$$

Розв'язання.

$x(1 + y^2)dx = ydy$, поділимо обидві частини рівняння на $(1 + y^2)$, маємо:

$$xdx = \frac{ydy}{1 + y^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1 + y^2},$$

$$\int \frac{ydy}{1 + y^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1 + y^2 \\ dt = 2ydy \\ ydy = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln|1 + y^2|$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \ln|1 + y^2| + \frac{1}{2} \ln C,$$

Так як похідна сталої C може приймати будь-яке числове значення, то для зручності подальших перетворень замість C записали $\frac{1}{2} \ln C$. Скоротивши отриману рівність на $\frac{1}{2}$ та використавши властивості логарифмів, маємо:

$$x^2 = \ln C |1 + y^2|.$$

2) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

Розв'язання. Відповідно до вищезгаданого позначимо $\frac{y}{x} = u$, тоді $y = ux$

та $y' = xu' + u$. Наше диференціальне рівняння набуває вигляду $xu' + u = u \ln u$, а

це і є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Зробимо відповідні перетворення:

$$xu' = u \ln u - u, \quad x \frac{du}{dx} = u(\ln u - 1), \quad xdu = u(\ln u - 1)dx, \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \left| \begin{matrix} t = \ln u - 1 \\ dt = \frac{du}{u} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln u - 1|.$$

Таким чином маємо:

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln C, \quad \ln|\ln u - 1| = \ln C|x| \Rightarrow \ln u - 1 = Cx \Rightarrow \ln u = Cx + 1 \\ \Rightarrow u = e^{Cx+1}.$$

Повертаємось до початкової змінної $\frac{y}{x} = e^{Cx+1} \Rightarrow y = xe^{Cx+1}$ – загальний

розв'язок заданого диференціального рівняння

3) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язання. Дане рівняння лінійне, а тому, згідно з наведеним вище, маємо:

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv'$$

тоді наше рівняння набуде вигляду:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}, \quad u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0, \\ u'v = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

Розглянемо кожне з наведених рівняння системи. При цьому стали інтегрування при знаходженні $v(x)$ покладаємо рівною нулю, так як нас цікавить будь-який розв'язок, що відрізняється від нуля.

$$v' + 2xv = 0, \quad v' = -2xv, \quad \frac{dv}{dx} = -2xv, \quad \frac{dv}{v} = -2x dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx, \quad \ln|v| = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}.$$

Тоді друге рівняння системи набуде вигляду:

$$u'v = xe^{-x^2}, \quad u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}, \quad u' = x, \quad \frac{du}{dx} = x, \quad du = x dx,$$

$$\int du = \int x dx, \quad u = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Відповідно, } y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^{-x^2}.$$

4.1) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 5y' + 6y = x + 1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння знаходимо у вигляді:

$$y_{3H} = y_{3O} + y_{CH}.$$

Спочатку розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$, та складемо його характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$, корені якого будуть $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Звідки можна записати:

$$y_{3O} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Права частина представлена у вигляді:

$$f(x) = e^{0x} P_n(x), \quad \text{де } P_n(x) = x + 1, \quad \alpha = 0, \quad \alpha \neq k_{1,2} \quad (\text{не є коренем}$$

характеристичного рівняння).

Тоді частинний розв'язок знаходимо у вигляді:

$$y_{CH} = Ax + B.$$

Для обчислення коефіцієнтів A та B знайдемо похідні

$$y'_{CH} = A, \quad y''_{CH} = 0,$$

і отримані значення підставляємо у задане рівняння:

$$-5A + 6Ax + 6B = x + 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та знайдемо невідомі коефіцієнти A та B .

$$x: 6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$x^0: -5A + 6B = 1, \quad -5 \cdot \frac{1}{6} + 6B = 1, \quad 6B = 1 + \frac{5}{6}, \quad 6B = \frac{11}{6}, \quad B = \frac{11}{36}.$$

$$\text{Тоді } y_{\text{ЧН}} = Ax + B = \frac{1}{6}x + \frac{11}{36}.$$

$$\text{Загальний розв'язок рівняння } y_{\text{ЗН}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x + \frac{11}{36}.$$

4.2) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - y' - 2y = x e^{2x}.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння знаходимо у вигляді:

$$y_{\text{ЗН}} = y_{\text{ЗО}} + y_{\text{ЧН}}.$$

Спочатку розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - y' - 2y = 0$, та складемо його характеристичне рівняння $k^2 - k - 2 = 0$, корені якого будуть $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. Отже,

$$y_{\text{ЗО}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Права частина представлена у вигляді:

$f(x) = e^{2x} P_n(x)$, де $P_n(x) = x$, $\alpha = 2$, $\alpha = k_2 \neq k_1$ (дорівнює одному кореню характеристичного рівняння).

Таким чином частинний розв'язок можна записати у вигляді:

$$y_{\text{ЧН}} = x(Ax + B) e^{2x} = (Ax^2 + Bx) e^{2x}.$$

Коефіцієнти A та B знаходимо вже відомим методом:

$$\begin{aligned} y'_{\text{ЧН}} &= (Ax^2 + Bx)' e^{2x} + (Ax^2 + Bx)(e^{2x})' = (2Ax + B)e^{2x} + 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} = \\ &= (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)e^{2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_{\text{ЧН}} &= (4Ax + 2A + 2B)e^{2x} + 2(2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)e^{2x} = \\ &= (4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)e^{2x}, \end{aligned}$$

$$(4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)e^{2x} - (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)e^{2x} - 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} = xe^{2x}$$

Скоротимо обидві частини e^{2x} , маємо

$$4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B - 2Ax^2 - 2Ax - 2Bx - B - 2Ax^2 - 2Bx = x,$$

$$6Ax + 2A + 3B = x,$$

$$\left. \begin{array}{l} x : 6A = 1 \\ x^0 : 2A + 3B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/6, \\ B = -1/9. \end{cases}$$

$$\text{Таким чином, } y_{\text{ЧН}} = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x \right) e^{2x}.$$

$$\text{Загальний розв'язок рівняння } y_{\text{ЗН}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x \right) e^{2x}.$$

4.3) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + 9y = 15 \cos 2x.$$

Розв'язання. Аналогічно попередньому випадку

$$y_{\text{ЗН}} = y_{\text{ЗО}} + y_{\text{ЧН}}.$$

Знайдемо $y_{\text{ЗО}}$:

$$y'' + 9y = 0, \quad k^2 + 9 = 0, \quad k^2 = -9, \quad k_{1,2} = \pm 3i \Rightarrow y_{\text{ЗО}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

За правою частиною рівняння складаємо $y_{\text{ЧН}}$:

$$f(x) = e^{0x}(15 \cos 2x), \quad \text{де } \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad 0 \pm 2i \neq k_{1,2} \quad (\text{не є коренем}$$

характеристичного рівняння), тоді

$$y_{\text{ЧН}} = e^{0x}(A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Знайдемо A та B . Для цього запишемо:

$$y'_{\text{ЧН}} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad y''_{\text{ЧН}} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставимо одержані вирази в задане диференціальне рівняння:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 9A \cos 2x + 9B \sin 2x = 15 \cos 2x, \quad \text{тоді}$$

$$5A \cos 2x + 5B \sin 2x = 15 \cos 2x,$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x : 5A = 15 \\ \sin 2x : 5B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким чином, $y_{\text{ЧН}} = 3 \cos 2x$, а відповідно:

$$y_{\text{ЗН}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 3 \cos 2x.$$

4. Запитання до підсумкового контролю

1. Сформулюйте означення первісної та невизначеного інтегралу.
2. Як пов'язані між собою операція інтегрування та диференціювання?
3. Дайте геометричне тлумачення невизначеного інтегралу.
4. Запишіть властивості невизначеного інтегралу.
5. Запишіть таблицю основних інтегралів.
6. Як перевірити правильність табличних інтегралів?
7. Які є основні методи інтегрування?
8. У чому полягає метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі?
9. Запишіть формулу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. В яких випадках і для яких інтегралів вона застосовується?
10. Яку функцію називають цілою раціональною або многочленом?
11. Якій раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним? Наведіть приклади.
12. Якій раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається неправильним? Наведіть приклади.
13. Який вигляд мають елементарні (найпростіші) дробу?
14. Як здійснюється розклад правильного раціонального дробу на елементарні?
15. Сформулюйте правило інтегрування раціонального дробу.
16. Інтегрування тригонометричних функцій виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$.
Запишіть універсальну тригонометричну підстановку. Інтеграли якого типу зручно знаходити з її допомогою?
17. Які підстановки доцільніше використовувати, якщо підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$ чи $\cos x$, або ж відносно $\sin x$ та $\cos x$ одночасно?

18. Які підстановки слід застосовувати при інтегруванні тригонометричних функцій виду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ в залежності від значень чисел m та n ?

19. Як слід інтегрувати функції виду: $\int \sin mx \cdot \cos nxdx$, $\int \sin mx \cdot \sin nxdx$, $\int \cos mx \cdot \cos nxdx$.

20. Дайте означення визначеного інтегралу. Розкрийте його геометричний зміст. Сформулюйте умови існування визначеного інтегралу.

21. Запишіть властивості визначеного інтегралу.

22. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца. Які особливості застосування методів заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі?

23. Дайте означення невласного інтегралу 1-го роду. Коли такі інтеграли називаються збіжними, а коли розбіжними? Наведіть формули для їх обчислення.

24. Яку точку функції $y = f(x)$ називають особливою точкою. Дайте означення невласного інтегралу 2-го роду. Коли такі інтеграли називаються збіжними, а коли розбіжними? Наведіть формули для їх обчислення.

25. Застосування визначеного інтегралу до обчислення площі плоскої фігури та довжини дуги кривої у декартових координатах.

26. Застосування визначеного інтегралу до обчислення об'єму фігури обертання.

27. Дайте означення функції двох незалежних змінних. Що називають областю визначення такої функції?

28. Дайте означення частинного приросту функції $z = f(x, y)$ за змінною x та за змінною y , а також частинних похідних від цієї функції. Які особливості їх знаходження на практиці?

29. Дайте означення повного приросту функції $z = f(x, y)$. Яка функція називається диференційованою в точці $M(x, y)$?

30. Як виражається повний диференціал першого порядку функції через її частинні похідні?
31. Що таке частинні похідні вищих порядків від функції двох змінних? Запишіть всі похідні другого порядку від функції $z = f(x, y)$. Сформулюйте теорему про мішані похідні.
32. Дайте означення повного диференціала другого порядку функції двох змінних і укажіть формулу для його знаходження.
33. Дайте означення дотичної площини та нормалі до поверхні. Запишіть формулу для їх знаходження у випадку коли рівняння поверхні задано неявно.
34. Дайте означення похідної за напрямком функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$. Запишіть формулу для її знаходження та розтлумачте фізичний зміст.
35. Дайте означення градієнта функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$. Розтлумачте його фізичний зміст.
36. Дайте означення точки екстремуму (максимуму і мінімуму) функції двох змінних.
37. В чому полягає необхідна умова екстремуму функції двох незалежних змінних?
38. Сформулюйте достатні умови екстремуму функції двох змінних.
39. Чи може функція $z = f(x, y)$ у критичних точках не мати екстремуму?
40. Що називають звичайним диференціальним рівнянням, розв'язком такого рівняння?
41. Як визначити порядок диференціального рівняння?
42. Що називають задачею Коші? З яких міркувань записуються початкові умови задачі Коші?
43. Дайте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними. Наведіть методику його інтегрування.

44. Дайте означення однорідного диференціального рівняння. Як воно зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?

45. Дайте означення лінійного диференціального рівняння 1-го порядку. Розкрийте метод його розв'язання.

46. Однорідні та неоднорідні лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Дайте означення та розкрийте методику інтегрування.

5. Вимоги щодо виконання, оформлення та здачі контрольної роботи.

Перед виконанням контрольної роботи студент повинен вивчити відповідні розділи рекомендованої літератури, а також розглянути приклад виконання контрольної роботи, наведений у даних методичних рекомендаціях і тільки після цього приступати до виконання контрольної роботи.

Номер варіанта контрольної роботи визначається порядковим номером студента у списку групи. Варіант узгоджується з викладачем під час установчої сесії. Виконання студентом іншого варіанту є підставою не зарахувати контрольну роботу.

Розв'язки задач і пояснення до них повинні бути досить детальними і в разі необхідності треба наводити графіки і рисунки.

Кожну контрольну роботу слід виконувати в окремому зошиті, на обкладинці якого вказується номер контрольної роботи, прізвище та ініціали студента, курс і спеціальність, а також номер залікової книжки і варіант. Наприклад:

Контрольна робота №2
з дисципліни
Вища математика
студента групи КНз – І – 1
Прізвище Ім'я По-батькові
Варіант № 15
Залікова книжка № 123456

Контрольна робота здається на кафедрі вищої математики (УБК, кабінет №510, тел. (044) 284-71-09) не пізніше, ніж за тиждень до початку екзаменаційної сесії. Після реєстрації на кафедрі вона перевіряється викладачем, рецензується і при наявності зауважень і помилок повертається студенту на доопрацювання. Контрольна робота, до якої немає зауважень, приймається викладачем до подальшого захисту. Студент, що не захистив (а тим більше не здав) контрольну роботу не допускається до здачі сесії (заліку чи іспиту).

6. Список рекомендованої літератури.

1. Анпілогов, Д.І. Сніжко Н.В. Диференціальні рівняння : навч. посібник. – Запоріжжя : НУ "Запорізька політехніка", 2019. – 176 с.
2. Вища математика: Методичні вказівки та індивідуальні тестові завдання для студентів стаціонарної форми навчання. Кредитно – модульна система навчання: У 2ч., ч.1. В.І. Гуляєв та ін., Київ, НТУ, 2006.
3. Вища математика. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних / О.В. Барабаш, Г.М. Власик, Н.Б. Дахно, І.В. Замрій, О.В. Свинчук, В.В. Шкапа. – К.: ДУТ, 2019. – 232 с.
4. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Кириллова Н.О., Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХП», 2009. – 432 с.
5. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., - За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 2003.
6. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навчальний посібник: У 4ч. – К.: НАУ, 2005.
7. Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2012. – 276 с.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика, К, Вища школа, 1993.
9. Інтегральне числення та диференціальні рівняння: практичний посібник з вищої математики / уклад.: Н.Д. Федоренко та ін. – К.: КНУБА, 2018. – 100 с.
10. Килимник І.М., Полякова Т.Г. Практикум з інтегрування функції однієї змінної: Навчальний посібник. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 306 с.

11. Ковалішина І.В. Елементи математичного аналізу. Диференціальне числення функцій кількох змінних: Конспект лекцій з вищої математики. – Харків: УкрДАЗТ, 2006. – Ч.8. – 30 с.
12. Ластівка І.О., Безверхий О.І., Кудзіновська І.П. Вища математика: навч. Посібник. – К.: НАУ, 2018. – 452 с
13. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах. - К.: Либідь, 2003. – 600 с.
14. Самойленко А. М., Перестюк М.О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
15. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 3 : Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. – Харків : ХНУРЕ, 2002. – 596 с.
16. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.

Довідковий матеріал

1. Таблиця похідних

$$1. (C)' = 0, \quad (C = \text{const})$$

$$3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$9. (\sin x)' = \cos x$$

$$11. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$4. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$6. (e^x)' = e^x$$

$$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$10. (\cos x)' = -\sin x$$

$$12. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$16. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. Основні правила диференціювання

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані в точці x , тоді в цій точці мають місце такі співвідношення:

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$2. (uv)' = u'v \pm v'u.$$

$$3. (Cu)' = cu', \text{ де } C = \text{const}.$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, v(x) \neq 0.$$

3. Таблиця інтегралів

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm A}\right| + C$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

4. Формули скороченого множення

$$1. a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$2. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$3. a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$4. (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab + 3ab^2 \pm b^3$$

5. Деякі тригонометричні формули

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

3. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

4. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

5. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

6. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

7. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

8. $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

9. $\cos 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

10. $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

11. $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

12. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

13. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи №2
з дисципліни «Вища математика» для здобувачів:
рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
для студентів заочної форми навчання
галузь знань 12 «Інформаційні технології»
спеціальність 122 «Комп’ютерні науки»
освітньо-професійна програма «Комп’ютерні науки»

Укладачі:

Людмила ШЕВЧУК

Наталія ШЛЮНЬ

Юлія ЗАЄЦЬ

Людмила ЛЕВКІВСЬКА