



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ТРАНСПОРТНИХ ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання самостійної роботи з дисципліни
«Математика» за розділами «Лінійна алгебра», «Векторна
алгебра», «Аналітична геометрія» для здобувачів:
рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
галузь знань 14 «Електрична інженерія»
спеціальність 142 «Енергетичне машинобудування»
освітньо-професійні програми:
«Автомобільні двигуни», «Технічне обслуговування і діагностика
автомобільних двигунів», «Гібридні та електричні автомобільні
енергетичні установки»**



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ТРАНСПОРТНИХ ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання самостійної роботи з дисципліни
«Математика» за розділами «Лінійна алгебра», «Векторна
алгебра», «Аналітична геометрія» для здобувачів:
рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
галузь знань 14 «Електрична інженерія»
спеціальність 142 «Енергетичне машинобудування»
освітньо-професійні програми:
«Автомобільні двигуни», «Технічне обслуговування і діагностика
автомобільних двигунів», «Гібридні та електричні автомобільні
енергетичні установки»**

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні Науково-методичної ради
Національного транспортного університету
протокол № 29 від « 28 » березня 2025 р.

Перший проректор,

Професор _____ Олександр МЕЛЬНИЧЕНКО

КИЇВ – 2025

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Математика» за розділами «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія» для здобувачів: рівень вищої освіти – перший (бакалаврський), галузь знань 14 «Електрична інженерія», спеціальність 142 «Енергетичне машинобудування», освітньо-професійні програми: «Автомобільні двигуни», «Технічне обслуговування і діагностика автомобільних двигунів», «Гібридні та електричні автомобільні енергетичні установки» / Укладачі: Л.В. Шевчук, Н.В.Шлюнь, Ю.О.Заєць, Л.В. Левківська. – К.: НТУ, 2025. – 85 с.

Укладачі:

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Людмила ШЕВЧУК;

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Наталія ШЛЮНЬ;

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Юлія ЗАЄЦЬ;

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри Людмила ЛЕВКІВСЬКА

Рекомендовано методичною комісією АВТОМЕХАНІЧНОГО факультету

Протокол № 6 від « 05 » лютого 2025 року

Голова методичної комісії факультету

Дмитро ЯЩЕНКО

© Людмила ШЕВЧУК, 2025 р.

© Наталія ШЛЮНЬ, 2025 р.

© Юлія ЗАЄЦЬ, 2025 р.

© Людмила ЛЕВКІВСЬКА, 2025 р.

© Національний транспортний університет, 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ»	6
1.1. Матриці та основні дії над ними	6
1.2. Визначники та їх властивості	8
1.3. Обернена матриця. Ранг матриці	11
1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), методи їх розв'язання	13
1.5. Завдання для самостійної роботи з розділу «Елементи лінійної алгебри»	18
2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	33
2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами	33
2.2. Добутки векторів та їх застосування	41
2.3. Завдання для самостійної роботи з розділу «Елементи векторної алгебри»	45
3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ	55
3.1. Різні види рівняння прямої на площині. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, точка перетину прямих.	55
3.2. Рівняння площини та рівняння прямої у просторі	58
3.3. Криві другого порядку	61
3.4. Завдання для самостійної роботи з розділу «Елементи аналітичної геометрії»	66
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ	80
ЛІТЕРАТУРА	83

ВСТУП

Методичні вказівки до організації та проведення самостійної роботи з дисципліни «Математика» за розділами «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра» та «Аналітична геометрія» укладені для студентів з метою забезпечення виконання ними самостійної роботи, що передбачена навчальною програмою з вищої математики.

Мета викладання розділів «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра» та «Аналітична геометрія» – ознайомлення студентів з основними поняттями вищої алгебри та аналітичної геометрії, розвиток у студентів логічного і алгоритмічного мислення, оволодіння основними методами дослідження та розв’язання математичних задач, вироблення уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та вирішення практичних задач.

Основне завдання цих розділів є навчити студентів свідомо застосовувати основні поняття вищої алгебри та аналітичної геометрії при розв’язуванні конкретних задач як самої вищої алгебри та аналітичної геометрії, так і суміжних дисциплін.

Представлений матеріал відповідає змісту та послідовності викладанню його на лекційних заняттях. Методичні вказівки містять: короткі теоретичні відомості з лінійної, векторної алгебра та аналітичної геометрії – формулювання основних понять і теорем; зразки розв’язування типів прикладів; підбір задач для самостійної роботи студентів в аудиторії; посилання на навчальну літературу; контрольні запитання.

В освітньо-професійних програмах: «Автомобільні двигуни», «Технічне обслуговування і діагностика автомобільних двигунів», «Гібридні та електричні автомобільні енергетичні установки», підготовки бакалавра студенти в результаті вивчення дисципліни «Математика» набувають таких компетентностей: здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; здатність забезпечувати якість виконуваних робіт; здатність діяти соціально відповідально та свідомо.

Результати навчання за спеціальністю 142 «Енергетичне машинобудування» передбачають: знання і розуміння математики, фізики, тепломасообміну, технічної термодинаміки, гідрогазодинаміки, трансформації (перетворення) енергії, технічної механіки, конструкційних матеріалів, систем автоматизованого проектування енергетичних машин на рівні, необхідному для досягнення результатів освітньої програми.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.

1.1. Матриці та основні дії над ними.

Означення. Прямокутна таблиця чисел a_{ij} , де $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, яка складається з m рядків та n стовпців записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається **матрицею**.

Означення. Матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$, де a_{ij} - елементи матриці, причому 1-й індекс i - показує номер рядка, а 2-й індекс j - номер стовпця на перетині яких стоїть даний елемент.

Означення. Матрицю A розміром $(m \times n)$ позначають як $A_{m \times n}$, де m кількість рядків, n кількість стовпців.

Означення. Матриця у якої число рядків m дорівнює числу стовпців n називається **квадратною**.

Означення. Кількість рядків/стовпців квадратної матриці називається її порядком.

Означення. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ - утворюють головну діагональ квадратної матриці.

Означення. Елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ - побічна діагональ квадратної матриці.

Означення. Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі елементи розташовані під/над головною діагоналлю дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися є не нульові.

Означення. Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі дорівнюють нулю.

Означення. Діагональна матриця у якої кожний елемент головної діагоналі дорівнює одиниці називається **одиничною**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення. Матрицю з показником A^T називають транспонованою до матриці A , якщо рядки матриці A^T (транспонованої) є стовпцями матриці A , а стовпці – рядками матриці A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Матриця, яка складається тільки з одного рядка називається **матрицею рядком**, а матриця, яка має тільки один стовпчик називається **матрицею стовпчиком**.

Означення. Нульовою матрицею називається матриця у якої всі елементи дорівнюють нулю.

Означення. Квадратна матриця A називається симетричною, якщо її елементи симетричні відносно головної діагоналі, рівні між собою, тобто $a_{ij} = a_{ji}$.

Дії над матрицями.

I. Додавання матриць (вводять лише для матриць однакового розміру)

Сумою $C = A + B$ однакових за розміром матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

II. Добутком матриці на число

Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k (або число k на матрицю $A_{m \times n}$) називають матрицю $B_{m \times n} = (ka_{ij})$.

III. Різниця матриць

Різницею матриць $A - B$ є сума матриці A та матриці B помноженої на (-1) .

IV. Множення матриць

Означення. Матриця $A_{m \times n}$ називається узгодженою з матрицею $B_{k \times l}$, якщо $n = k$ (кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B).

Добутком матриці $A_{m \times n}$ (розміру $(m \times n)$) на матрицю $B_{n \times k}$ (розміру $(n \times k)$) називається матриця $C_{m \times k} = A \cdot B = (c_{ij})$ (розміру $(m \times k)$), у якій елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \text{ де } (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k}).$$

1.2. Визначники та їх властивості.

Кожній квадратній матриці n -го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

може бути поставлено у відповідність деяке число, яке називається визначником (детермінантом) матриці, або просто визначником n -го порядку.

Визначник матриці позначають Δ (дельта), або $|A|$, або $\det A$ (детермінант):

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо квадратну матрицю A другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Означення: Визначником квадратної матриці 2-го порядку називається число, яке дорівнює $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ і позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (1)$$

Формула (1) означає, що визначник другого порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів бічної діагоналі.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \quad (2)$$

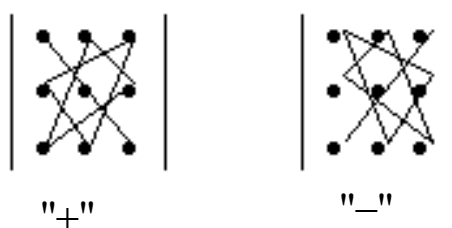
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

називають визначником 3-го порядку.

Елементи a_{11} , a_{22} , a_{33} утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_{13} , a_{22} , a_{31} – побічну.

Кожен доданок у формулі (2) складається із добутку трьох елементів і містить по одному і тільки одному елементу із кожного стовпця і кожного рядка.

Для зручності застосування формули (2) використовується правило трикутників, або «правило зірочки». Зобразимо два визначника, елементи яких позначимо точками:



Властивості визначників.

Розглянемо властивості визначників на прикладі визначників третього порядку.

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється:

$$\Delta A = \Delta A^T.$$

2. Визначник змінить знак на протилежний, якщо переставити місцями будь-які два рядки (або стовпці).

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то і визначник дорівнює нулю.

4. Визначник, у якому є два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.

5. Спільний множник всіх елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

6. Визначник, який містять два пропорційні рядки (стовпці) відповідно, дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, в першому з яких у відповідному рядку (стовпці) розташовані перші доданки, а у другому – другі доданки. Інші рядки в обох визначниках однакові і такі, як у вихідному визначнику.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), попередньо помножені на одне й те саме число.

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A n -го порядку називається визначник порядку $(n-1)$, який отримується з матриці A викресленням i -го рядка і j -го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij} .

Зауваження. Для кожного елемента існує свій мінор.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор M_{ij} , взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (3)$$

Для обчислення визначників будь-якого порядку застосовується формула розкладу визначника за елементами деякого рядка чи стовпця.

Теорема Лапласа. Визначник дорівнює сумі добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{ki} .$$

Визначники n-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} ,$$

тобто цей визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення (Теорема Лапласа).

В результаті застосування цієї формули замість одного визначника n-го порядку потрібно обчислити n визначників (n-1)-го порядку. Такий спосіб обчислення занадто громіздкий. На практиці зручно, якщо частина елементів рівні нулю. Тому доцільно спочатку визначник перетворити так, щоб усі елементи деякого рядка (стовпця), крім одного дорівнювали нулю. Для цього використовують властивості визначників.

1.3. Обернена матриця. Ранг матриці.

Розглянемо квадратну матрицю A n -го порядку.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A , якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Означення. Квадратну матрицю називають не виродженою, або неособливою, якщо її визначник не дорівнює нулю ($|A| \neq 0$); в протилежному разі ($|A| = 0$) – матрицю називають виродженою, або особливою.

Зауваження. Не кожна квадратна матриця має обернену.

Теорема (Необхідна і достатня умова існування оберненої матриці).

Обернена матриця A^{-1} існує і єдина тоді і тільки тоді, коли матриця A не вироджена.

Одним із способів обчислення оберненої матриці є застосування алгебраїчних доповнень:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де $|A|$ – визначник матриці A ; A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A .

Для дослідження й розв’язування багатьох задач важливе значення має поняття рангу матриці.

Якщо в матриці A розміру $m \times n$ викреслити будь-які k рядків і k стовпців, то можна відокремити квадратні підматриці k -го порядку, де $(k \leq \min(m, n))$.

Визначники таких підматриць називають *мінорами* k -го порядку матриці A .

Наприклад, із матриці A розміру 3×4 можна отримати під матриці 1-го, 2-го і 3-го порядків.

Означення. Рангом матриці A називають найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля і позначають:

$\text{rang} A$ або $r(A)$.

Сам мінор при цьому називається базисним.

Ранг існує для будь-якої матриці A розміру $m \times n$, причому

$$0 \leq r \leq \min(m, n).$$

Елементарні перетворення матриці:

1. Відкидання нульового рядка (стовпця).
2. Множення всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля.
3. Перестановка місцями двох рядків (стовпців).

4. Додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Теорема. Внаслідок елементарних перетворень матриці її ранг не змінюється.

Елементарні перетворення зводять матрицю A до матриці ступінчатого виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr} \neq 0,$$

яка містить тільки r ненульових рядків. Тоді всі її мінори порядку $k > r$ мають хоча б один нульовий рядок і дорівнюють нулю, а її мінор порядку r :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{rr} \neq 0.$$

Звідси ранг ступінчатої, а отже, і самої матриці A дорівнює r .

Отже, ранг матриці дорівнює максимальній кількості ненульових рядків.

1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (слар), методи їх розв'язання.

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що містить m рівнянь і n невідомих, називається система вигляду :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (5)$$

де $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – коефіцієнти системи (задані дійсні числа);

$b_1, b_2, \dots, b_m$ – вільні члени системи (також задані);

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – невідомі, які потрібно знайти.

Означення. Розв’язком СЛАР називають множину дійсних чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, підстановка яких у систему замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює кожне рівняння у тотожність.

Система рівнянь називається **однорідною**, якщо всі вільні члени системи дорівнюють нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$). Якщо серед вільних членів є ненульові, то систему називають неоднорідною.

Зауваження. Однорідна система завжди має розв’язок, а саме ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$), який називається **тривіальним**.

Система рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має один або декілька розв’язків, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв’язку.

Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв’язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше, ніж один розв’язок.

Дві системи лінійних рівнянь, які мають однакові розв’язки, називаються **еквівалентними**.

Подамо систему (5) у матричному вигляді.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – основна матриця системи.}$$

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) - \text{розширена матриця системи.}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матриця невідомих.} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{матриця вільних членів}$$

системи.

Тоді система (5) набуде вигляду:

$$AX = B \quad (6)$$

Такий запис системи називають матричним.

Розв'язуючи ту чи іншу систему рівнянь, як правило, насамперед з'ясовують сумісна вона чи ні, а потім знаходять її розв'язки.

Нехай задано СЛР (5), у якій число невідомих n не менше кількості рівнянь m . Питання про сумісність такої системи вирішує наступна теорема.

Теорема Кронекера-Капеллі. СЛАР сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг r основної матриці системи дорівнює рангу r' розширеної матриці системи.

За цією теоремою, якщо ранг основної та розширеної матриць не рівні, то система несумісна і немає сенсу її розв'язувати.

Для сумісних СЛАР можливі такі випадки:

1. Якщо ранг матриці сумісної системи дорівнює числу невідомих, тобто $r = n$, то система (5) має єдиний розв'язок.

2. Якщо ранг матриці сумісної системи менший від числа невідомих ($r < n$), то система має нескінченну кількість розв'язків.

Нехай $r < n$, тоді r невідомих $x_1, x_2, \dots, x_r$ називаються базисними, якщо визначник матриці з коефіцієнтів при цих невідомих (базисний мінор) відмінний від нуля. Решта $n - r$ невідомих називаються вільними. Базисні невідомі $x_1, x_2, \dots, x_r$ лінійно виражаються через вільні невідомі.

Метод Крамера.

Розглянемо найбільш важливий і в той же час найбільш простий випадок, коли число невідомих дорівнює числу рівнянь, а саме систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (7)$$

Утворимо визначник системи (7) складений із коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо в СЛАР кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих, то система сумісна і має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ – визначник СЛАР, Δ_j ($j = \overline{1, n}$) – допоміжний визначник, який утворюється з Δ шляхом заміни j -го стовпця стовпцем вільних членів.

Зауваження:

1) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$, то система може або взагалі не мати розв'язків, або мати їх нескінченну множину.

2) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$, і хоча б один з визначників $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ не дорівнює 0, то система несумісна, тобто не має розв'язків.

3) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$ і визначники $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Метод Гауса.

Метод Гауса – універсальний метод розв’язування СЛАР. Суть методу полягає у послідовному виключенні невідомих з системи рівнянь. Процес розв’язання складається з двох етапів.

Перший етап (прямий хід) метод Гауса ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь.

Елементарні перетворення системи:

1. Перестановка місцями двох рівнянь системи.
2. Множення обох частин рівняння на деяке число λ відмінне від нуля.
3. Додавання до елементів одного рівняння відповідних елементів іншого рівняння, попередньо помножених на деяке число.

За допомогою таких перетворень систему (5) зводять до ступінчастого вигляду.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \qquad \qquad \bar{a}_{33}x_3 + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\ \qquad \qquad \qquad \text{-----} \\ \qquad \qquad \qquad \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 = \bar{b}_n \end{array} \right. \quad (8)$$

На другому етапі (зворотній хід) послідовно визначають невідомі системи, рухаючись від останнього рівняння до першого.

Матричний метод.

Нехай СЛАР (5) задано в матричній формі (6).

$$AX = B.$$

Припустимо, що матриця A має обернену матрицю A^{-1} . Помножимо обидві частини рівності (6) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Оскільки, $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \quad (9)$$

Отже, щоб розв'язати СЛАР (5), достатньо знайти обернену матрицю до матриці системи, і помножити її на матрицю вільних членів.

Зауваження. Застосовувати матричний метод можна лише тоді, коли матриця системи не вироджена.

1.5. Завдання для самостійної роботи з розділу «елементи лінійної алгебри».

1. Дано матриці A , B і C .

Знайти: а) $A + B$; б) $B^T - A$; в) $A \cdot B$; г) $A^2 - B^2$; д) $C^2 - A \cdot B$.

$$1) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{10)} & A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{11)} & A = \begin{pmatrix} 4 & -14 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{12)} & A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{13)} & A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
\mathbf{14)} & A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{15)} & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{16)} & A = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{17)} & A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{18)} & A = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{19)} & A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{20)} & A = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{21)} & A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \\
\mathbf{22)} & A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{23)} & A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$24) A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$25) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$26) A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$27) A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$28) A = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$29) A = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$30) A = \begin{pmatrix} -17 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Знайти матрицю X , яка задовольняє рівняння:

$$1) A + 2X = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$2) 2X - 3A = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -1 & -14 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$3) A + 4X = 2B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 3 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4) 3A - 7X = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$5) 0,5X + 4A = 3B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$6) 2X + A = 3B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 12 & -18 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

- 7) $2A + 3X = 4B$, де $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.
- 8) $2X + 4A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 8 & 20 & -3 \end{pmatrix}$.
- 9) $4A - 2X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 8 & -14 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.
- 10) $6A - 0,5X = 3B$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.
- 11) $5X - 3A = 4B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 14 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & 8 & -10 \end{pmatrix}$.
- 12) $A - 0,5X = 3B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$.
- 13) $3X - 6A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix}$.
- 14) $2X + A = 3B$, де $A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & -10 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -1 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.
- 15) $0,5X + 3A = 2B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & -16 \\ -9 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
- 16) $7A - 2X = 5B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.
- 17) $0,5X + A = 4B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$.
- 18) $3A + X = 4B$, де $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 8 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.
- 19) $3X + 2A = 4B$, де $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$$20) \quad 3A + X = 2B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} -12 & 6 & -7 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$21) \quad 0,25X - 2A = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ -3 & -8 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$22) \quad 0,5X - 2A = 7B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$23) \quad 2X + 6A = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -5 & -4 & -11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$24) \quad A - 3X = 4B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -4 & -8 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$25) \quad A + 0,5X = 3B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$26) \quad 2A + 3X = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -4 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -15 & 4 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$27) \quad 4A + X = 2B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -8 \\ 18 & -14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -3 & 5 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$28) \quad 4X + 2A = 5B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$29) \quad 0,5X - A = 3B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 24 & -13 & 3 \\ -11 & 7 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$30) \quad X + 3A = 2B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 13 & -8 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти добуток матриць:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 0 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -13 & \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{4)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \\ 8 & 3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 0 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{6)} \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 6 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{7)} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{8)} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{9)} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 4 & -7 & 6 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{10)} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{11)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{12)} \begin{pmatrix} -1 & 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{13)} \begin{pmatrix} -4 & 7 & 9 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \mathbf{14)} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{15)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{16)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{17)} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{18)} \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{19)} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{20)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -5 \\ 0 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{21)} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & 2 \\ -6 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{22)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{23)} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{24)} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{25)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{26)} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{27)} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{28)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -5 & 7 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{29)} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{30)} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

4. Обчислити визначник третього порядку:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$2) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$3) \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$4) \begin{vmatrix} 6 & -1 & -5 \\ 5 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$5) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 7 & -9 \\ -1 & 2 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$6) \begin{vmatrix} -3 & 10 & -6 \\ -2 & 11 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 12 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$8) \begin{vmatrix} -5 & 15 & 8 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$9) \begin{vmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 13 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$10) \begin{vmatrix} 9 & 4 & 18 \\ -6 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$11) \begin{vmatrix} 5 & -4 & 8 \\ 8 & 11 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$12) \begin{vmatrix} 6 & 11 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ -9 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$13) \begin{vmatrix} 2 & 8 & 13 \\ -6 & -7 & 2 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$14) \begin{vmatrix} -12 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$15) \begin{vmatrix} 9 & 11 & 7 \\ -6 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$16) \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -2 & -16 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$17) \begin{vmatrix} -8 & 8 & 7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$18) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 8 \\ -2 & -8 & 1 \\ 4 & 11 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$19) \begin{vmatrix} 11 & -7 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$20) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & -14 & 8 \\ 4 & 11 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$21) \begin{vmatrix} -9 & 12 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$22) \begin{vmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$23) \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 1 & 11 & -7 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$24) \begin{vmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & -7 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$25) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -3 & -8 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$26) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & -11 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$27) \begin{vmatrix} -6 & 5 & 9 \\ 9 & -8 & 12 \\ 4 & 9 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$28) \begin{vmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \\ -9 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$29) \begin{vmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$30) \begin{vmatrix} 5 & 16 & 8 \\ -2 & 23 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

5. Спростити і обчислити визначник:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ -9 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \\ -4 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$4) \begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 & -6 \\ 1 & 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$6) \begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$7) \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$8) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$9) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -9 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$10) \begin{vmatrix} -2 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$11) \begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$12) \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -8 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$13) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & -6 \\ -1 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$14) \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$15) \begin{vmatrix} 4 & 11 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$16) \begin{vmatrix} -12 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$17) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 22 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$18) \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 & 3 \\ -9 & 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{lll}
19) \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 & 5 \\ -7 & -3 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} & 20) \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 & -8 \\ 12 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} & 21) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -4 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ -9 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\
22) \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & 1 \\ -11 & 7 & -7 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} & 23) \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} & 24) \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -8 & -2 & -6 & 3 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
25) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & -1 & 5 \\ 19 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} & 26) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -8 & 17 & 2 \end{vmatrix} & 27) \begin{vmatrix} 8 & 5 & -5 & 1 \\ 6 & 12 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
28) \begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 & 2 \\ 3 & -9 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} & 29) \begin{vmatrix} -11 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} & 30) \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 11 & 1 & 21 \\ -9 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}
\end{array}$$

6. Знайти дійсні корені рівняння:

$$\begin{array}{ll}
1) \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 3 & 4-x & 7 \\ -1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0. & 2) \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ 3 & 3-x & 6 \\ -2 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0. \\
3) \begin{vmatrix} 1-x & 4 & 5 \\ 2 & 1-x & 3 \\ -4 & 3 & 1+x \end{vmatrix} = 0. & 4) \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ 1 & 4-x & 5 \\ 3 & 2 & 5-x \end{vmatrix} = 0. \\
5) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ -2 & 3-x & 2 \\ 4 & 2 & 6-x \end{vmatrix} = 0. & 6) \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0. \\
7) \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 5 & 1-x & 6 \\ -2 & 2 & -x \end{vmatrix} = 0. & 8) \begin{vmatrix} -3-x & 3 & 0 \\ -1 & 3-x & 2 \\ 2 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.
\end{array}$$

$$9) \begin{vmatrix} 4-x & -2 & 2 \\ -1 & 3-x & 2 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$11) \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 4 & -2-x & 2 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$13) \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ -3 & 2-x & -1 \\ 0 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$15) \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -1 & -x & -1 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$17) \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 5 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$19) \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 2 \\ -1 & 3-x & 2 \\ 2 & -2 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

$$21) \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 3 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$23) \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -2 \\ -1 & 3-x & 2 \\ -3 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$25) \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ 0 & 3-x & 3 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$27) \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 5 \\ -1 & 3-x & 2 \\ -1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$10) \begin{vmatrix} -3-x & 4 & 1 \\ -3 & 1-x & -2 \\ 1 & -2 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$12) \begin{vmatrix} -3-x & -1 & -4 \\ 1 & 2-x & 3 \\ -1 & 3 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$14) \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 4 \\ 0 & 2-x & 2 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$16) \begin{vmatrix} -1-x & -2 & -3 \\ 3 & 2-x & 5 \\ 2 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$18) \begin{vmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$20) \begin{vmatrix} -x & 2 & 1 \\ -3 & 1-x & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$22) \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ 3 & -4-x & -1 \\ 2 & -2 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

$$24) \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ 1 & 4-x & 5 \\ 1 & -2 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$26) \begin{vmatrix} -x & 2 & 2 \\ -2 & 4-x & 2 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$28) \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 2 \\ 4 & -x & 4 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$29) \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 4 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$30) \begin{vmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

7. Знайти оберну матрицю до матриці:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -1 & 11 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5) A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 11 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 12 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -1 & -8 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -10 & 0 \\ -3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ -9 & 5 & 11 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$10) A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 8 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$11) A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 4 \\ 0 & 7 & -5 \\ -10 & 19 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$12) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 21 & -6 & -5 \\ 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$13) A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$14) A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ -11 & 0 & 2 \\ 13 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$15) A = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 3 \\ 1 & 15 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$16) A = \begin{pmatrix} 17 & -3 & 1 \\ 18 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$17) A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -8 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$18) A = \begin{pmatrix} -19 & 5 & 0 \\ 20 & 2 & 2 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$19) A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$20) A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$21) A = \begin{pmatrix} 24 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$22) A = \begin{pmatrix} -12 & -4 & 10 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$23) A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 4 \\ -3 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$24) A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -9 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{lll}
25) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 7 & 10 & 4 \\ 0 & 15 & -7 \end{pmatrix} & 26) \quad A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 8 \\ 0 & 10 & -7 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} & 27) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 9 & 8 & -2 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} \\
28) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -6 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} & 29) \quad A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 2 \\ -7 & -6 & -8 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} & 30) \quad A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 5 \\ -30 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

8. Знайти ранг матриці:

$$\begin{array}{ll}
1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 5 & -9 & 9 \\ 5 & -3 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} & 2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & -5 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} & 4) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 11 & -6 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\
5) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} & 6) \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & -4 & 1 \\ -12 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
7) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 1 \\ 12 & -1 & -1 & 0 \\ -11 & -7 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & 8) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
9) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 5 \\ -2 & 6 & 5 & -7 & 10 \end{pmatrix} & 10) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 6 & -9 \end{pmatrix} \\
11) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ 5 & 15 & -11 & 1 & 18 \\ 7 & -24 & 26 & 5 & -27 \end{pmatrix} & 12) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$13) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 5 \\ -2 & 10 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$14) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & 7 & -6 \\ 5 & -8 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$15) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 15 & -6 \\ -1 & 3 & -5 & 2 \\ -2 & 4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$16) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & -10 \\ 1 & 4 & -8 \\ 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$17) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & -2 \\ -4 & 8 & -12 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$18) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 & 2 \\ -4 & 11 & 1 & 4 \\ 8 & 24 & -20 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$19) \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \\ 3 & -6 & -6 \\ -10 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$20) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -9 & 10 \\ -2 & 2 & -4 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & -8 & 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$21) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 10 & 12 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$22) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 18 & 12 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$23) \quad A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 6 & 3 & -12 \\ 7 & 14 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$24) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 7 & 5 \\ -8 & 4 & 6 & 2 & -4 \\ -4 & 12 & -6 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$25) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 8 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \\ -9 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$26) \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -2 & -6 & 5 \\ 6 & 18 & -15 \\ 15 & 28 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$27) \quad A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 3 & -3 \\ -15 & -21 & -30 & -3 \\ -9 & 10 & -12 & 24 \\ 24 & -12 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$28) \quad A = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 4 & -20 \\ 3 & -2 & 1 & -6 \\ 3 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$29) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 & -4 & -8 \\ -4 & 4 & -6 & 3 & 16 \\ -6 & 6 & -24 & 12 & 24 \\ 6 & 3 & 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$30) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 & -4 & -1 \\ 10 & 0 & -14 & 4 & -2 \\ -15 & 8 & 21 & 32 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

- а) методом Крамера;
- б) матричним методом;
- в) методом Гаусса.

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ 3x - 2y + z = 10, \\ x + 3y - z = -3. \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -1, \\ 2x + y - 2z = -6, \\ x - y + 4z = 7. \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = -9, \\ 2x - y - z = -2, \\ 2x + y - 4z = -11. \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - y - z = 2, \\ 3x - 2y + z = -1. \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} -2x + y - 3z = -10, \\ 4x + 2y + z = 3, \\ x - 3y - z = 10. \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} x + y - 7z = 0, \\ 2x - 2y - z = 5, \\ y + 4z = 6. \end{cases}$ |
| 7) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -1, \\ 4x - y + z = -3, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = -10, \\ x + y + z = 3, \\ 2x - 3y + 4z = 7. \end{cases}$ | 9) $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 4, \\ 2x - y + 4z = -12, \\ 5x - y = 3. \end{cases}$ |
| 10) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 4, \\ 3x + 4z = 8, \\ x + y - z = 6. \end{cases}$ | 11) $\begin{cases} 5x - 3y + z = -4, \\ 2x - y + 2z = -7, \\ x + y - 3z = 4. \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} x + 5y + 4z = -4 \\ 5x + y - 2z = 6, \\ 3x - 4y + z = 15. \end{cases}$ |
| 13) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ 3x - y - z = 3, \\ x + 4y + z = -2. \end{cases}$ | 14) $\begin{cases} 4x + y - 2z = 0, \\ x - y + 3z = -6, \\ 3x + 2y - z = 2. \end{cases}$ | 15) $\begin{cases} 2x - y + 6z = 6, \\ x + y - 4z = 7, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$ |
| 16) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 12, \\ x - y - 2z = 0, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$ | 17) $\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 6, \\ x - y + 4z = 0, \\ 2x + 3y - 4z = 7. \end{cases}$ | 18) $\begin{cases} 3x - y - z = 10, \\ 2x + y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 4. \end{cases}$ |

$$\begin{array}{lll}
19) \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 2x - y + z = 10, \\ x + 4y - 2z = -2. \end{cases} & 20) \begin{cases} 7x - y + 2z = -11, \\ 5x + 3y + 4z = -9, \\ x - 4y + 5z = 7. \end{cases} & 21) \begin{cases} x - 3y + 5z = -11, \\ 3x + 2y - 2z = -6, \\ 4x + y - z = -13. \end{cases} \\
22) \begin{cases} x + 2y + z = 9, \\ 3x + 2y - z = 3, \\ x - 3y + 2z = 9. \end{cases} & 23) \begin{cases} 2x + 6y + 3z = 9, \\ x - 4y + 2z = -3, \\ 7x - y - z = 21. \end{cases} & 24) \begin{cases} 6x - y - 2z = -11, \\ 4x + 2y - z = -5, \\ x + 3y + 4z = -3. \end{cases} \\
25) \begin{cases} x + 5y - z = -8, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ x + 2y + 4z = 5. \end{cases} & 26) \begin{cases} 3x + 2z = 1, \\ x - y - 5z = 1, \\ 6x + y - z = 12. \end{cases} & 27) \begin{cases} x + 4y - 3z = -7, \\ 2x - y - 2z = 9, \\ 3x + 2y - 4z = 4. \end{cases} \\
28) \begin{cases} -x + 3y - 2z = -1, \\ x + y - 4z = 11, \\ 3x + 5y + 2z = -13 \end{cases} & 29) \begin{cases} x - 7y + 5z = -6, \\ 2x + 3y - z = 11, \\ 5x - y + 3z = 16. \end{cases} & 30) \begin{cases} x - 5y + z = -3, \\ 3x + y - z = -5, \\ 5x + 2y + 4z = 9. \end{cases}
\end{array}$$

10. Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{array}{ll}
1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} & 2) X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 40 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\
3) X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -53 & -29 \end{pmatrix} & 4) \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -18 & -20 \\ -15 & -24 \end{pmatrix} \\
5) \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 46 & 10 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} & 6) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 45 & -18 \end{pmatrix} \\
7) X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} & 8) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 23 & -26 \\ -1 & -22 \end{pmatrix} \\
9) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -12 & -10 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 26 & -20 \end{pmatrix} & 10) X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 28 \\ 18 & -15 \end{pmatrix} \\
11) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -28 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & 12) \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 27 & 43 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\
13) \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -15 & -24 \\ 23 & -5 \end{pmatrix} & 14) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -18 \\ 1 & -23 \end{pmatrix} \\
15) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} & 16) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -30 & 13 \\ -45 & 2 \end{pmatrix} \\
17) \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -24 & -18 \\ 2 & -21 \end{pmatrix} & 18) X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 28 \\ -21 & -10 \end{pmatrix} \\
19) X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & -18 \\ -12 & -11 \end{pmatrix} & 20) \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 38 & -2 \\ 44 & -5 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$21) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$$

$$23) X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 39 \\ -10 & 22 \end{pmatrix}$$

$$25) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$27) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -30 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}$$

$$29) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$22) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 35 & -6 \end{pmatrix}$$

$$24) \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -12 & 27 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$26) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -50 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}$$

$$28) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 6 & -20 \end{pmatrix}$$

$$30) X \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.

2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами.

У математиці, фізиці, електротехніці, механіці та інших прикладних науках доводиться мати справу з величинами двох видів: скалярними і векторними.

Скалярною величиною, або **скаляром**, називається величина, яка характеризується, за вибраної одиниці вимірювання лише числом.

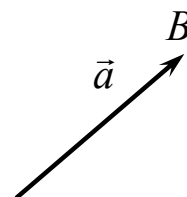
Векторною величиною, або **вектором**, називається величина, яка характеризується числовою характеристикою і напрямом у просторі.

Будь-яка впорядкована пара точок A та B простору визначає напрямлений відрізок, вектор, тобто відрізок, який має певну довжину і певний напрям.

Точку A називають початком вектора, а точку B – кінцем вектора. Напрямом вектора вважають напрям від його початку до його кінця.

Позначають вектори малими літерами із стрілками:
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$, або $\overrightarrow{AB}$.

Графічно вектор зображають у вигляді напрямленого відрізка AB .



Числова характеристика вектора $\overrightarrow{AB}$ називається його **модулем**: $|\overrightarrow{AB}|$ і дорівнює довжині відрізка AB у вибраній системі одиниць.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці називається **одиничним**.

Вектор, початок якого збігається з його кінцем, називається **нульовим** і позначається $\vec{0}$. Напрямок нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

Означення. Два вектори називаються **колінеарними** ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони розташовані на одній або паралельних прямих.

Якщо два колінеарні вектори мають один і той же напрям, то вони називаються **співнаправленими** ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), у протилежному випадку — **протилежно напрямленими** ($\vec{a} \downarrow \vec{b}$).

Означення. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ вважаються **рівними**, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини і напрям.

Означення. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються **компланарними**, якщо вони паралельні одній площині, або лежать в одній площині.

Лінійні операції над векторами.

Лінійними операціями над будь-якими величинами однакової природи називаються операція їх додавання і операція множення цієї величини на скаляр.

Сумою двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило трикутника (рис. 1)). Вектор $\vec{c}$ у цьому випадку є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (правило паралелограма (рис. 2)). Додавання кількох векторів здійснюється за правилом замикання ланцюжка векторів (правило многокутника (рис.3)).

Правило паралелограми Правило трикутника Правило багатокутника

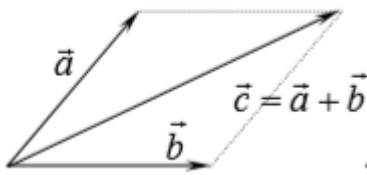


Рис.1

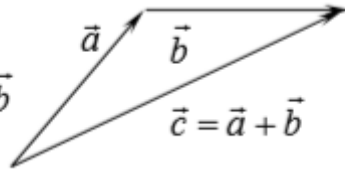


Рис.2

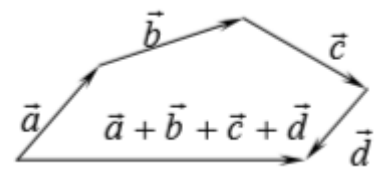


Рис.3

Добутком числа λ на вектор $\vec{a}$, називається вектор $\vec{c} = \lambda \vec{a}$ такий, що:

1. модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів числа λ і вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|;$$

2. вектор $\vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$: $\vec{a} \parallel \vec{c}$;

3. якщо $\lambda > 0$, то вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}$ співнаправлені, а якщо $\lambda < 0$, то вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}$ протилежно напрямлені.

Якщо $\lambda = -1$, то добуток $\lambda \vec{a} = -\vec{a}$ і дістаємо вектор, **протилежний** вектору $\vec{a}$.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що мають спільний початок, є вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, який з'єднує кінці цих векторів і напрямлений із кінця від'ємника (вектор $\vec{b}$) в кінець зменшуваного (вектор $\vec{a}$). У паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $\vec{a} - \vec{b}$ співпадає із другою діагоналлю, яка з'єднує кінці векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ (рис. 4).

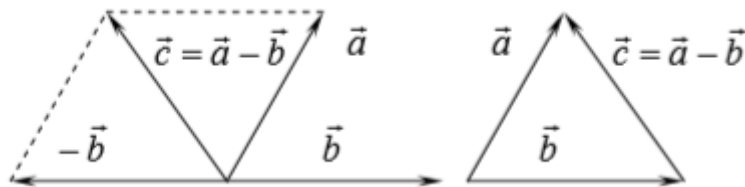


Рис.4

Основні властивості лінійних операції над векторами:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативна властивість)
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативна властивість)

- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- 5) $\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \mu \cdot \vec{a}$
- 6) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
- 7) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

Лінійна незалежність векторів.

Вираз виду $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – числа, називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно незалежними**, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0. \quad (10)$$

Якщо в (10) хоча б одне із чисел $\lambda_k \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно залежними**. У цьому випадку принаймні один із векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації інших, наприклад, якщо $\lambda_1 \neq 0$, то:

$$\vec{a}_1 = c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n, \quad c_k = -\lambda_k / \lambda_1 \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (11)$$

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору називається розмірністю простору.

Істинні такі твердження:

1. Будь-які два колінеарні вектори лінійно залежні (рис.5).
2. Будь-які три компланарні вектори лінійно залежні (рис.6).
3. Будь-які чотири вектори у трьохвимірному просторі лінійно залежні.

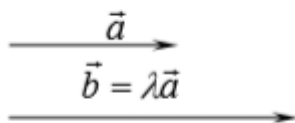


Рис.5

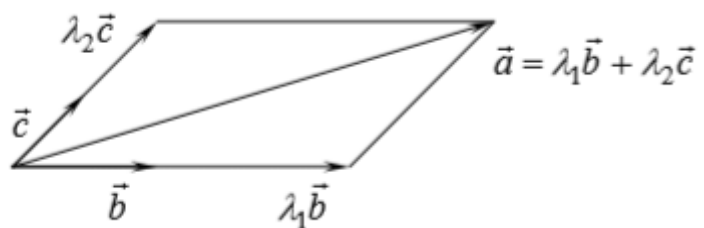


Рис.6

Теорема (Умова колінеарності векторів). Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли має місце співвідношення

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \text{ де } \lambda \text{ — скаляр, причому } \lambda \neq 0.$$

Теорема (Умова компланарності векторів). Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **компланарні** тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших. Наприклад,

$\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$, де λ_1, λ_2 — два скаляри, причому хоча б один із них не дорівнює нулю.

Базис. Розкладання вектора за базисом.

Упорядкована сукупність n лінійно незалежних векторів n -вимірного простору утворює його базис.

Базисом на прямій (у R^1) називається будь-який ненульовий вектор.

Базисом на площині (у R^2) називаються два неколінеарні вектори, взяті у визначеному порядку.

Базисом у трьохвимірному просторі (у R^3) називаються три некомпланарні вектори, взяті у визначеному порядку.

Якщо кути між базисними векторами довільні, базис називають довільним і позначають базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Якщо базисні вектори взаємно перпендикулярні (ортогональні), базис називають ортогональним. Якщо вектор $\vec{a}$ поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\vec{a} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3, \quad (12)$$

то кажуть, що він розкладений за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Вектори $c_1 \vec{e}_1, c_2 \vec{e}_2, c_3 \vec{e}_3$ називають складовими (компонентами) вектора $\vec{a}$, а числа c_1, c_2, c_3 — його координатами в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Звичайно пишуть так: $\vec{a} = (c_1, c_2, c_3)$.

Вектор у декартовій системі координат.

Базисом на площині (у просторі) називається довільна упорядкована пара (трійка) не колінеарних (не компланарних) векторів. Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базисні вектори, тобто вектори, які складають базис у просторі, і

$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, де x, y, z – числа, то це означає, що вектор $\vec{a}$ розкладений за цими базисними векторами, причому x, y, z – його координати в цьому базисі. Зазначимо, що кожний вектор можна розкласти за даним базисом і в цьому випадку його координати визначаються однозначно.

Сукупність точки, яка називається початком координат, і базисних векторів із спільним початком в цій точці називається декартовою системою координат.

Якщо вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ складають базис у просторі $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ та $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2}$, то такий базис називається ортонормованим.

Вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворюють праву трійку, коли з кінця вектора $\vec{k}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ видно проти годинникової стрілки, в протилежному разі ці вектори складають ліву трійку.

Прямокутною декартовою системою координат називається Декартові система координат, ортонормованим базис якої утворений правою трійкою векторів. Надалі розглядатиметься лише права прямокутна система координат

Вектор $\vec{a}$, заданий координатами a_x, a_y, a_z , записується у вигляді

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \text{ або } \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad (13)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори (орти).

Довжини вектора обчислюються так:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (14)$$

Якщо початок вектора міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – у точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ обчислюються за формулою

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (15)$$

Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і дійсне число λ .

Тоді:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z). \quad (16)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \quad (17)$$

Вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, якщо

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (18)$$

Напрямні косинуси вектора.

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ називаються косинуси кутів α, β, γ , які утворює вектор з координатними осями

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (19)$$

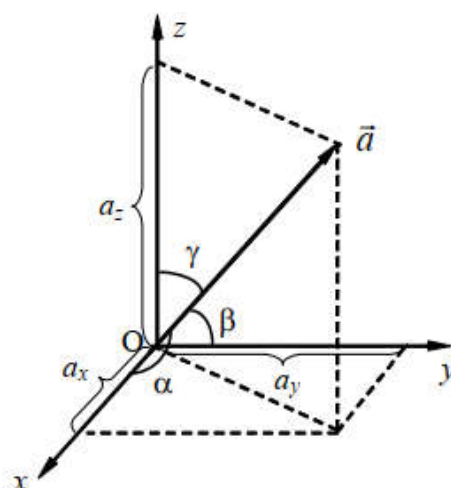


Рис.7

Напрямні косинуси задовольняють умову:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (20)$$

Координати одиничного вектора (орта) є його напрямними косинусами:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (21)$$

Проекція вектора на вісь.

Нехай у просторі заданий вектор $\overline{AB}$ і вісь OX (рис.8). Через точки A і B проведемо площини, що перпендикулярні вісі OX . Позначимо через A_1 й

B_1 точки перетину цих площин з віссю OX .

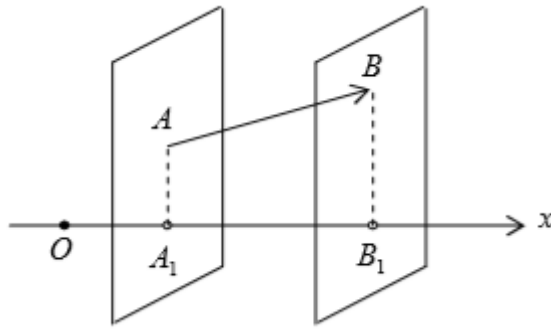


Рис.8

Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, що лежить на осі OX називається геометричною проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь OX і позначається $pr_{Ox} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

Довжина вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ береться зі знаком «плюс», якщо напрямок вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ співпадає з додатним напрямком вісі OX , і зі знаком «мінус», якщо напрямок вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ протилежний напрямку вісі OX , називається алгебраїчною проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь OX і позначається

$$pr_{Ox} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \text{ або } pr_{Ox} \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{A_1B_1}|.$$

Основні властивості проекції вектора на вісь:

1. Проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута між вектором і віссю (рис.9)

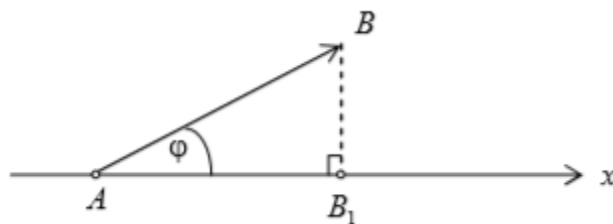


Рис.9

$$pr_{Ox} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi. \quad (22)$$

2. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ , його проекція множиться на це число

$$np_{Ox} \lambda \vec{a} = \lambda np_{Ox} \vec{a}.$$

3. Проекція суми векторів на вісь дорівнює сумі проекцій векторів на цю вісь

$$np_{Ox} \sum_{i=1}^n \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n np_{Ox} \vec{a}_i.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні.

Якщо точка $C(x, y, z)$ належить прямій AB і ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|}$, то координати x, y, z точки C визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (23)$$

У частинному випадку, коли точка C є серединою відрізка AB , тобто при $\lambda = 1$, маємо координати середини відрізка AB :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (24)$$

2.2. Добутки векторів та їх застосування.

Скалярний добуток векторів та його властивості

Існують два види добутків двох векторів: скалярний і векторний. Результатом скалярного добутку двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є число, результатом векторного – вектор. Скалярний добуток позначається так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, а векторний: $\vec{a} \times \vec{b}$.

Означення. Кутом між двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається менший із кутів, на який потрібно повернути один із векторів так, щоб його напрям збігся із напрямом другого вектора.

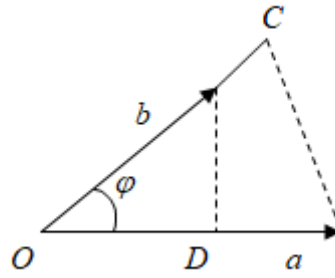


Рис.10

Позначається цей кут так: $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ і $0 < \varphi < 180^\circ$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (25)$$

Отже, добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ – це додатне число, якщо $\varphi < 90^\circ$ і від'ємне число, якщо $\varphi > 90^\circ$.

Властивості скалярного добутку:

1. Комутативність множення

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2. Дистрибутивність відносно додавання

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

3. Асоціативність відносно множення на число

$$(\lambda \vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

4. (Умова перпендикулярності двох векторів)

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (26)$$

5. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \text{ або } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (27)$$

6. Скалярний добуток векторів, заданих координатами, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто, якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (28)$$

Кут $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ між двома векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ визначається рівністю:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (29)$$

Векторний добуток векторів та його властивості.

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який визначається умовами:

1. Довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$
2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Властивості векторного добутку.

1. Некомутативність множення:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Якщо два вектори колінеарні, то їх векторний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

3. Асоціативність відносно скалярного множення:

$$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$

4. Розподільна властивість відносно додавання:

$$\vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Векторний добуток в координатній формі.

Якщо вектори задано координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то їх векторний добуток визначається за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (30)$$

Геометричне застосування векторного добутку.

Модуль векторного добутку $|\vec{a} \times \vec{b}|$ двох не колінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма побудованого на цих векторах, віднесених

до спільного початку

$$S_{\text{парал}} = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (31)$$

Мішаний добуток векторів та його властивості.

Означення. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається скалярний добуток векторів $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначення $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Якщо вектори задано координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то їх мішаний добуток можна знайти за допомогою визначника

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Зауваження. Якщо три вектора компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Зауваження. Для довільних трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконуються рівності

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

Геометричне застосування.

Модуль мішаного добутку $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, віднесених до спільного початку

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (33)$$

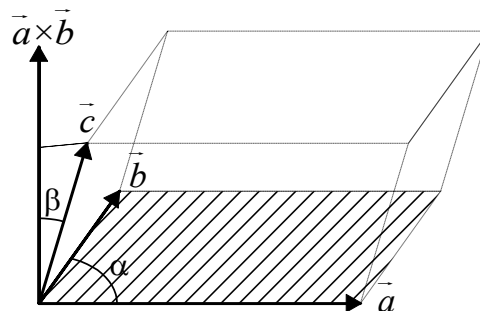


Рис. 11

2.3. Завдання для самостійної роботи з розділу «Елементи векторної алгебри».

1. Дано точки P_1 та P_2 . Знайти:

1) координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$;

2) координати точки P , якщо $|\overrightarrow{P_1P}| : |\overrightarrow{PP_2}| = m : n$;

3) координати точки P_3 , якщо $\overrightarrow{P_1P_3} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$.

- 1) $P_1(-4;5;-6)$, $P_2(5;-7;2)$, $m:n=2:5$, $\lambda=3$.
- 2) $P_1(-2;0;-4)$, $P_2(-4;1;-2)$, $m:n=3:1$, $\lambda=2$.
- 3) $P_1(-5;1;4)$, $P_2(1;3;1)$, $m:n=3:2$, $\lambda=4$.
- 4) $P_1(5;-1;-4)$, $P_2(11;1;-1)$, $m:n=2:1$, $\lambda=-2$.
- 5) $P_1(-3;-1;8)$, $P_2(-7;-5;6)$, $m:n=1:4$, $\lambda=-3$.
- 6) $P_1(15;-2;-14)$, $P_2(11;0;10)$, $m:n=2:3$, $\lambda=4$.
- 7) $P_1(-8;-12;3)$, $P_2(0;-3;15)$, $m:n=1:5$, $\lambda=-2$.
- 8) $P_1(10;-5;-4)$, $P_2(1;7;5)$, $m:n=3:5$, $\lambda=-3$.
- 9) $P_1(5;2;-6)$, $P_2(25;-10;3)$, $m:n=4:5$, $\lambda=3$.
- 10) $P_1(-3;-2;16)$, $P_2(9;18;7)$, $m:n=2:3$, $\lambda=-2$.
- 11) $P_1(-1;8;26)$, $P_2(23;0;20)$, $m:n=3:2$, $\lambda=-4$.
- 12) $P_1(-7;7;15)$, $P_2(-1;-1;-9)$, $m:n=2:7$, $\lambda=2$.
- 13) $P_1(-4;5;22)$, $P_2(4;-1;-2)$, $m:n=6:5$, $\lambda=4$.
- 14) $P_1(1;-8;12)$, $P_2(25;-2;4)$, $m:n=1:2$, $\lambda=-2$.
- 15) $P_1(4;9;14)$, $P_2(-2;-15;22)$, $m:n=1:3$, $\lambda=-3$.
- 16) $P_1(-5;17;21)$, $P_2(4;5;1)$, $m:n=4:3$, $\lambda=-5$.
- 17) $P_1(2;11;33)$, $P_2(22;-1;24)$, $m:n=4:1$, $\lambda=4$.
- 18) $P_1(-7;4;13)$, $P_2(1;-5;1)$, $m:n=5:3$, $\lambda=-6$.
- 19) $P_1(3;-8;14)$, $P_2(-9;1;6)$, $m:n=5:2$, $\lambda=5$.
- 20) $P_1(-9;3;5)$, $P_2(0;15;13)$, $m:n=4:7$, $\lambda=-2$.

- 21) $P_1(-1;4;12), P_2(3;0;10), m:n=6:7, \lambda=-2.$
- 22) $P_1(2;6;4), P_2(6;4;8), m:n=2:1, \lambda=-3.$
- 23) $P_1(-11;16;1), P_2(-5;10;4), m:n=3:4, \lambda=2.$
- 24) $P_1(-14;-3;2), P_2(-8;3;-1), m:n=4:5, \lambda=-3.$
- 25) $P_1(2;4;7), P_2(4;7;1), m:n=2:3, \lambda=4.$
- 26) $P_1(-11;18;36), P_2(1;14;30), m:n=4:5, \lambda=-2.$
- 27) $P_1(-4;-3;0), P_2(2;1;12), m:n=1:6, \lambda=-4.$
- 28) $P_1(9;4;16), P_2(49;28;-2), m:n=4:3, \lambda=2.$
- 29) $P_1(0;5;21), P_2(18;11;12), m:n=6:5, \lambda=3.$
- 30) $P_1(-3;5;20), P_2(3;14;2), m:n=1:4, \lambda=-5.$

2. Чи колінеарні вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

- 1) $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(3;0;-1), \vec{m}=2\vec{a}+4\vec{b}, \vec{n}=-\vec{a}+3\vec{b}.$
- 2) $\vec{a}(1;0;1), \vec{b}(-2;3;5), \vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}, \vec{n}=3\vec{a}-\vec{b}.$
- 3) $\vec{a}(-2;4;1), \vec{b}(1;-2;7), \vec{m}=5\vec{a}+3\vec{b}, \vec{n}=2\vec{a}-\vec{b}.$
- 4) $\vec{a}(1;2-3), \vec{b}(2;-1;-1), \vec{m}=4\vec{a}+3\vec{b}, \vec{n}=8\vec{a}-\vec{b}.$
- 5) $\vec{a}(3;5;4), \vec{b}(5;9;7), \vec{m}=-2\vec{a}+\vec{b}, \vec{n}=3\vec{a}-2\vec{b}.$
- 6) $\vec{a}(1;4;-2), \vec{b}(1;1;-1), \vec{m}=\vec{a}+\vec{b}, \vec{n}=4\vec{a}+2\vec{b}.$
- 7) $\vec{a}(1;-2;5), \vec{b}(3;-1;0), \vec{m}=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{n}=-2\vec{a}+\vec{b}.$
- 8) $\vec{a}(3;4;-1), \vec{b}(2;-1;1), \vec{m}=6\vec{a}-3\vec{b}, \vec{n}=-2\vec{a}+\vec{b}.$
- 9) $\vec{a}(-2;-3-2), \vec{b}(1;0;5), \vec{m}=3\vec{a}-9\vec{b}, \vec{n}=-\vec{a}-3\vec{b}.$
- 10) $\vec{a}(-1;4;2), \vec{b}(3;-2;6), \vec{m}=2\vec{a}-\vec{b}, \vec{n}=-6\vec{a}+3\vec{b}.$
- 11) $\vec{a}(5;0;-1), \vec{b}(7;2;3), \vec{m}=2\vec{a}-\vec{b}, \vec{n}=6\vec{a}+3\vec{b}.$
- 12) $\vec{a}(0;3;-2), \vec{b}(1;-2;1), \vec{m}=5\vec{a}-2\vec{b}, \vec{n}=3\vec{a}+5\vec{b}.$
- 13) $\vec{a}(-2;7;-1), \vec{b}(-3;5;2), \vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b}, \vec{n}=3\vec{a}+2\vec{b}.$
- 14) $\vec{a}(3;7;0), \vec{b}(1;-3;4), \vec{m}=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{n}=-2\vec{a}+\vec{b}.$

- 15) $\vec{a}(3;-2;0), \vec{b}(3;0;-4), \vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{n} = -\vec{a} + 4\vec{b}.$
- 16) $\vec{a}(2;0;1), \vec{b}(-2;3;-5), \vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}, \vec{n} = -3\vec{a} + 4\vec{b}.$
- 17) $\vec{a}(-3;4;-1), \vec{b}(1;-2;6), \vec{m} = 4\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{n} = 3\vec{a} - \vec{b}.$
- 18) $\vec{a}(1;4;-3), \vec{b}(2;1;-1), \vec{m} = 4\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{n} = 6\vec{a} - \vec{b}.$
- 19) $\vec{a}(3;5;2), \vec{b}(5;0;7), \vec{m} = -2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}.$
- 20) $\vec{a}(0;4;-3), \vec{b}(4;1;-1), \vec{m} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{n} = 5\vec{a} + 2\vec{b}.$
- 21) $\vec{a}(1;-2;3), \vec{b}(3;-1;1), \vec{m} = 4\vec{a} - \vec{b}, \vec{n} = -3\vec{a} + \vec{b}.$
- 22) $\vec{a}(4;4;-1), \vec{b}(2;-1;3), \vec{m} = 5\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{n} = -4\vec{a} + \vec{b}.$
- 23) $\vec{a}(2;2;-2), \vec{b}(1;0;3), \vec{m} = 3\vec{a} - 7\vec{b}, \vec{n} = -\vec{a} - 2\vec{b}.$
- 24) $\vec{a}(-1;4;3), \vec{b}(3;-2;1), \vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{n} = -4\vec{a} + 3\vec{b}.$
- 25) $\vec{a}(3;0;-1), \vec{b}(7;2;3), \vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b}.$
- 26) $\vec{a}(1;3;-2), \vec{b}(1;-2;2), \vec{m} = 5\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{n} = 3\vec{a} + 4\vec{b}.$
- 27) $\vec{a}(-2;4;-1), \vec{b}(-3;1;2), \vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b}.$
- 28) $\vec{a}(3;7;0), \vec{b}(1;-3;4), \vec{m} = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}.$
- 29) $\vec{a}(3;3;0), \vec{b}(1;-3;1), \vec{m} = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{n} = -2\vec{a} + \vec{b}.$
- 30) $\vec{a}(3;2;1), \vec{b}(1;-3;2), \vec{m} = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{n} = 6\vec{a} + \vec{b}.$

3. Дано точки A, B, C . При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB ?

- 1) $A(-1;2;1), B(-2;3;3), C(4;\alpha;\beta).$
- 2) $A(\alpha;2;\beta), B(1;2;3), C(-1;7;1).$
- 3) $A(1;1;-1), B(-\alpha;\beta;4), C(2;2;-3).$
- 4) $A(0;-2;1), B(3;1;3), C(2;\alpha;\beta).$
- 5) $A(-1;\alpha;\beta), B(1;-2;2), C(5;2;3).$
- 6) $A(2;2;1), B(-2;\alpha;\beta), C(1;-1;-2).$
- 7) $A(1;-2;1), B(3;2;2), C(\alpha;4;\beta).$

- 8) $A(\alpha; 2; \beta), B(-1; 4; -2), C(2; 1; 1).$
- 9) $A(3; 3; 1), B(\alpha; 1; \beta), C(-1; 4; 3).$
- 10) $A(1; 4; -1), B(2; 5; 3), C(6; \alpha; \beta).$
- 11) $A(\alpha; \beta; 4), B(-2; 1; 1), C(2; -2; -3).$
- 12) $A(5; 2; -3), B(-2; \alpha; \beta), C(1; 1; -1).$
- 13) $A(-6; 1; -1), B(4; 2; 3), C(\alpha; \beta; 6).$
- 14) $A(-2; \alpha; \beta), B(1; 6; -3), C(2; -3; 1).$
- 15) $A(2; 2; -1), B(\alpha; 4; \beta), C(-5; 3; 2).$
- 16) $A(3; -1; -1), B(1; 4; 2), C(\alpha; -5; \beta).$
- 17) $A(\alpha; 6; \beta), B(-3; 4; 1), C(-1; 2; -1).$
- 18) $A(3; -2; -3), B(\alpha; \beta; 4), C(1; -1; -2).$
- 19) $A(2; -2; 3), B(1; 3; -3), C(\alpha; -4; \beta).$
- 20) $A(\alpha; 2; -1), B(-2; \beta; 4), C(2; 4; 5).$
- 21) $A(1; 2; 2), B(2; \alpha; 3), C(4; 5; \beta).$
- 22) $A(\alpha; -3; 2), B(-2; 1; 3), C(4; 4; \beta).$
- 23) $A(-1; 2; -2), B(-2; 6; -4), C(8; \alpha; \beta).$
- 24) $A(\alpha; 3; \beta), B(2; 1; -3), C(3; 4; 5).$
- 25) $A(2; 2; -1), B(\alpha; -4; \beta), C(6; 4; -3).$
- 26) $A(4; 2; \alpha), B(2; \beta; 1), C(8; 1; -1).$
- 27) $A(\alpha; -2; 2), B(2; 1; 1), C(-1; 4; \beta).$
- 28) $A(4; 4; 2), B(2; 2; 4), C(-2; \alpha; \beta).$
- 29) $A(\alpha; 2; \beta), B(1; 3; 6), C(-2; 5; 4).$
- 30) $A(1; -2; -2), B(\alpha; \beta; -6), C(4; 4; -4).$

4. Обчислити:

1. а) $(4\vec{a} + 7\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \varphi = \frac{\pi}{3}.$
2. а) $(2\vec{a} + 5\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \varphi = \frac{2\pi}{3}.$

3. а) $(3\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
4. а) $(4\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 4\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
5. а) $(4\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$.
6. а) $(5\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
7. а) $(2\vec{a} + 4\vec{b})(-3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{2\pi}{3}$.
8. а) $(3\vec{a} + 2\vec{b})(-\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
9. а) $(4\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
10. а) $(6\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|4\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{b}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$.
11. а) $(5\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
12. а) $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{2\pi}{3}$.
13. а) $(5\vec{a} + 2\vec{b})(-\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|\vec{a} + 4\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
14. а) $(4\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
15. а) $(2\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$.
16. а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
17. а) $(3\vec{a} + 5\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{2\pi}{3}$.
18. а) $(3\vec{a} + 2\vec{b})(-\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|\vec{a} + 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 6\sqrt{2}, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{4}$.

19. а) $(-4\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 6, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
20. а) $(2\vec{a} - 5\vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 4\sqrt{3}, |\vec{b}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$.
21. а) $(\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
22. а) $(3\vec{a} + \vec{b})(4\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, \varphi = \frac{2\pi}{3}$.
23. а) $(3\vec{a} + 5\vec{b})(-\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
24. а) $(-\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
25. а) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3\sqrt{3}, |\vec{b}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$.
26. а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|3\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
27. а) $(2\vec{a} + \vec{b})(4\vec{a} - \vec{b})$; б) $|5\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{2\pi}{3}$.
28. а) $(3\vec{a} + 5\vec{b})(-\vec{a} + \vec{b})$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
29. а) $(\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}$.
30. а) $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5\sqrt{3}, |\vec{b}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$.

5. Знайти скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$ та кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1. $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}, \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}, \vec{m}(-1;3;4), \vec{n}(-5;1;2)$.
2. $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}, \vec{m}(-2;1;2), \vec{n}(-2;4;3)$.
3. $\vec{a} = -2\vec{m} + 7\vec{n}, \vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}, \vec{m}(2;-3;4), \vec{n}(-1;-1;3)$.
4. $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}, \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}, \vec{m}(-4;3;1), \vec{n}(2;2;1)$.
5. $\vec{a} = \vec{m} - 4\vec{n}, \vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}, \vec{m}(-4;3;2), \vec{n}(-2;4;5)$.
6. $\vec{a} = -\vec{m} + 3\vec{n}, \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}, \vec{m}(3;3;1), \vec{n}(-2;-3;-2)$.

7. $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} - 6\vec{n}, \quad \vec{m}(4;3;2), \quad \vec{n}(2;1;4).$
8. $\vec{a} = -3\vec{m} + 7\vec{n}, \quad \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{m}(-1;0;4), \quad \vec{n}(-3;1;2).$
9. $\vec{a} = -3\vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{m}(3;2;1), \quad \vec{n}(-1;-2;-2).$
10. $\vec{a} = 5\vec{m} - 4\vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{m}(0;-4;4), \quad \vec{n}(-2;-3;3).$
11. $\vec{a} = -\vec{m} + 4\vec{n}, \quad \vec{b} = \vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{m}(-1;4;4), \quad \vec{n}(3;1;-2).$
12. $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}, \quad \vec{m}(-5;1;2), \quad \vec{n}(-3;4;3).$
13. $\vec{a} = -3\vec{m} - 4\vec{n}, \quad \vec{b} = \vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{m}(0;-2;2), \quad \vec{n}(-2;-3;0).$
14. $\vec{a} = -3\vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} + 9\vec{n}, \quad \vec{m}(2;3;2), \quad \vec{n}(2;-1;-4).$
15. $\vec{a} = 5\vec{m} - 3\vec{n}, \quad \vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}, \quad \vec{m}(-2;4;2), \quad \vec{n}(-3;0;3).$
16. $\vec{a} = -\vec{m} + 3\vec{n}, \quad \vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{m}(3;-2;1), \quad \vec{n}(-1;-2;2).$
17. $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{m}(2;1;2), \quad \vec{n}(2;-1;-2).$
18. $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{b} = 4\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{m}(-1;2;3), \quad \vec{n}(4;1;-3).$
19. $\vec{a} = -3\vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{m}(3;-2;0), \quad \vec{n}(1;-2;2).$
20. $\vec{a} = -2\vec{m} - 3\vec{n}, \quad \vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{m}(0;-2;1), \quad \vec{n}(2;-4;0).$
21. $\vec{a} = -\vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{m}(-1;2;1), \quad \vec{n}(4;1;-2).$
22. $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{m}(-2;4;3), \quad \vec{n}(-3;0;2).$
23. $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{m}(0;-2;2), \quad \vec{n}(-2;-3;0).$
24. $\vec{a} = -3\vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{m}(2;1;4), \quad \vec{n}(2;-1;-3).$
25. $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{b} = 5\vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{m}(-2;4;0), \quad \vec{n}(-4;0;2).$
26. $\vec{a} = -\vec{m} - 2\vec{n}, \quad \vec{b} = -\vec{m} - 3\vec{n}, \quad \vec{m}(4;-1;0), \quad \vec{n}(1;-2;3).$
27. $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{b} = \vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{m}(2;0;4), \quad \vec{n}(3;-1;-2).$
28. $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}, \quad \vec{m}(-1;4;1), \quad \vec{n}(3;1;-2).$
29. $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n}, \quad \vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{m}(3;-2;0), \quad \vec{n}(1;-4;3).$
30. $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{m}(0;-1;1), \quad \vec{n}(-2;-1;0).$

6. Знайти векторний добуток:

1. $(2\vec{a} + 4\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(-2;1;2)$, $\vec{b}(-2;4;3)$.
2. $(5\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-1;3;4)$, $\vec{b}(-5;1;2)$.
3. $(-2\vec{a} + 7\vec{b}) \times (3\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-4;3;1)$, $\vec{b}(2;2;1)$.
4. $(3\vec{a} + 4\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(2;-3;4)$, $\vec{b}(-1;-1;3)$.
5. $(\vec{a} - 4\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a}(3;3;1)$, $\vec{b}(-2;-3;-2)$.
6. $(-\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(-4;3;2)$, $\vec{b}(-2;4;5)$.
7. $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 6\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-1;0;4)$, $\vec{b}(-3;1;2)$.
8. $(-3\vec{a} + 7\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(4;3;2)$, $\vec{b}(2;4;1)$.
9. $(-3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(1;-4;2)$, $\vec{b}(-2;-3;3)$.
10. $(5\vec{a} - 4\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(3;2;1)$, $\vec{b}(-1;-2;-2)$.
11. $(-\vec{a} + 4\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(-5;1;2)$, $\vec{b}(-3;4;3)$.
12. $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-1;4;4)$, $\vec{b}(3;1;-2)$.
13. $(-3\vec{a} - 4\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(2;3;2)$, $\vec{b}(2;-1;-4)$.
14. $(-3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 9\vec{b})$, якщо $\vec{a}(0;-2;2)$, $\vec{b}(-2;3;0)$.
15. $(5\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a}(3;-2;1)$, $\vec{b}(-1;-2;2)$.
16. $(-\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-2;4;2)$, $\vec{b}(-3;0;3)$.
17. $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-1;2;3)$, $\vec{b}(4;1;-3)$.
18. $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (4\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(2;1;2)$, $\vec{b}(2;-1;-2)$.
19. $(-3\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(0;-2;1)$, $\vec{b}(-2;-4;0)$.
20. $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}(3;-2;0)$, $\vec{b}(1;-2;2)$.
21. $(-\vec{a} - 2\vec{b}) \times (-\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-2;4;3)$, $\vec{b}(-3;0;2)$.
22. $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-1;2;1)$, $\vec{b}(4;1;-2)$.
23. $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(2;1;4)$, $\vec{b}(2;-1;3)$.
24. $(-3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (4\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(0;-2;2)$, $\vec{b}(-2;-3;0)$.

25. $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (5\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}(4;-1;0)$, $\vec{b}(1;-2;3)$.
26. $(-\vec{a} - 2\vec{b}) \times (-\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a}(-2;4;0)$, $\vec{b}(-4;0;2)$.
27. $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(-1;4;1)$, $\vec{b}(3;1;-2)$.
28. $(3\vec{a} + 4\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(2;0;4)$, $\vec{b}(3;-1;-2)$.
29. $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (4\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(0;-1;1)$, $\vec{b}(-2;-1;0)$.
30. $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a}(3;-2;0)$, $\vec{b}(1;-4;3)$.

7. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

1. $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (3;-4;2)$, $\vec{c} = (-2;0;1)$.
2. $\vec{a} = (-1;2;1)$, $\vec{b} = (-3;1;6)$, $\vec{c} = (6;-2;-12)$.
3. $\vec{a} = (2;-3;1)$, $\vec{b} = (-3;4;-1)$, $\vec{c} = (1;-2;10)$.
4. $\vec{a} = (5;4;-8)$, $\vec{b} = (6;-2;4)$, $\vec{c} = (1;1;-2)$.
5. $\vec{a} = (3;0;4)$, $\vec{b} = (-5;2;-1)$, $\vec{c} = (6;-2;-1)$.
6. $\vec{a} = (2;-1;3)$, $\vec{b} = (-4;8;-5)$, $\vec{c} = (-2;-2;0)$.
7. $\vec{a} = (-2;6;1)$, $\vec{b} = (1;-3;-5)$, $\vec{c} = (3;-9;-1)$.
8. $\vec{a} = (4;-2;0)$, $\vec{b} = (-3;1;1)$, $\vec{c} = (2;-8;3)$.
9. $\vec{a} = (-1;0;5)$, $\vec{b} = (2;1;-8)$, $\vec{c} = (4;-8;-3)$.
10. $\vec{a} = (4;5;-10)$, $\vec{b} = (-8;-1;2)$, $\vec{c} = (6;3;-6)$.
11. $\vec{a} = (2;-5;4)$, $\vec{b} = (-3;0;1)$, $\vec{c} = (-9;3;-7)$.
12. $\vec{a} = (-7;-5;1)$, $\vec{b} = (4;-1;2)$, $\vec{c} = (-6;3;-2)$.
13. $\vec{a} = (0;-2;-4)$, $\vec{b} = (-5;2;4)$, $\vec{c} = (-6;6;12)$.
14. $\vec{a} = (4;-8;3)$, $\vec{b} = (3;-6;-7)$, $\vec{c} = (-1;2;10)$.
15. $\vec{a} = (-3;2;-1)$, $\vec{b} = (1;9;5)$, $\vec{c} = (-4;-2;-7)$.
16. $\vec{a} = (-8;2;-3)$, $\vec{b} = (1;-7;-2)$, $\vec{c} = (0;1;3)$.
17. $\vec{a} = (-1;3;3)$, $\vec{b} = (-3;4;2)$, $\vec{c} = (-2;1;1)$.
18. $\vec{a} = (1;-3;-3)$, $\vec{b} = (2;1;1)$, $\vec{c} = (-2;6;6)$.
19. $\vec{a} = (-3;1;0)$, $\vec{b} = (1;2;8)$, $\vec{c} = (-3;-2;1)$.

20. $\vec{a} = (-2; -5; 2)$, $\vec{b} = (4; 5; -2)$, $\vec{c} = (1; 0; 3)$.
21. $\vec{a} = (4; 5; -2)$, $\vec{b} = (-3; 1; 2)$, $\vec{c} = (2; -2; 4)$.
22. $\vec{a} = (2; -1; -3)$, $\vec{b} = (2; -1; 4)$, $\vec{c} = (-2; 1; -4)$.
23. $\vec{a} = (-5; 0; -1)$, $\vec{b} = (2; -2; -1)$, $\vec{c} = (4; -2; 0)$.
24. $\vec{a} = (3; -3; -1)$, $\vec{b} = (-1; -2; 1)$, $\vec{c} = (0; 5; -3)$.
25. $\vec{a} = (4; 5; -2)$, $\vec{b} = (-6; 3; 3)$, $\vec{c} = (8; 1; -4)$.
26. $\vec{a} = (-6; 1; -2)$, $\vec{b} = (2; 1; 7)$, $\vec{c} = (1; -1; -1)$.
27. $\vec{a} = (2; -2; -3)$, $\vec{b} = (4; -1; -2)$, $\vec{c} = (-3; 0; 7)$.
28. $\vec{a} = (3; 5; -6)$, $\vec{b} = (2; 7; 4)$, $\vec{c} = (-4; 5; 8)$.
29. $\vec{a} = (1; 0; 7)$, $\vec{b} = (-2; 3; 4)$, $\vec{c} = (-1; -2; 1)$.
30. $\vec{a} = (3; -3; -4)$, $\vec{b} = (1; -2; 0)$, $\vec{c} = (2; -2; -5)$.

8. Дано точки A, B, C, D . Знайти

а) $(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$;

б) $(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}) \times (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$;

в) кут ADB ;

г) довжину висоти AO піраміди $ABCD$ опущену на основу BCD .

- | | | | | |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1. | $A(2; -1; 1)$ | $B(-3; 0; -2)$ | $C(1; 3; 0)$ | $D(4; 1; -1)$ |
| 2. | $A(1; 1; -2)$ | $B(2; -1; 3)$ | $C(4; 3; -1)$ | $D(0; 2; -2)$ |
| 3. | $A(3; -1; -1)$ | $B(2; 0; -2)$ | $C(-1; 4; 1)$ | $D(2; 6; 1)$ |
| 4. | $A(0; 3; -4)$ | $B(4; 1; 3)$ | $C(1; 0; -4)$ | $D(-2; 3; 1)$ |
| 5. | $A(2; -3; 0)$ | $B(1; 2; -1)$ | $C(-1; 3; 4)$ | $D(3; 4; -2)$ |
| 6. | $A(-4; 1; -3)$ | $B(2; 3; 0)$ | $C(-1; 1; -2)$ | $D(0; -3; 1)$ |
| 7. | $A(0; -3; 1)$ | $B(1; -1; 2)$ | $C(3; 0; -2)$ | $D(1; -4; 1)$ |
| 8. | $A(-2; 2; 0)$ | $B(4; 1; 5)$ | $C(1; -2; 3)$ | $D(-1; -1; 2)$ |
| 9. | $A(4; -1; 2)$ | $B(-2; 3; 0)$ | $C(4; -2; 1)$ | $D(3; -3; -1)$ |
| 10. | $A(-2; 0; -1)$ | $B(2; 2; 3)$ | $C(4; -2; 0)$ | $D(1; -1; 1)$ |

11.	$A(3;-2;0)$	$B(-1;2;-1)$	$C(1;0;3)$	$D(4;2;-2)$
12.	$A(4;0;0)$	$B(2;-1;-1)$	$C(-3;1;-1)$	$D(2;0;-2)$
13.	$A(4;-5;-1)$	$B(3;0;-2)$	$C(-1;-5;1)$	$D(2;-2;1)$
14.	$A(3;-3;4)$	$B(1;-1;3)$	$C(2;2;-2)$	$D(0;-1;4)$
15.	$A(1;1;4)$	$B(3;-1;-2)$	$C(0;1;-2)$	$D(2;-2;4)$
16.	$A(2;-4;0)$	$B(-3;0;1)$	$C(2;-2;-2)$	$D(-3;1;-4)$
17.	$A(1;-5;-3)$	$B(-2;-6;0)$	$C(4;1;-2)$	$D(0;2;-1)$
18.	$A(3;-3;3)$	$B(1;0;5)$	$C(-2;1;-1)$	$D(2;2;0)$
19.	$A(-1;2;3)$	$B(3;2;-1)$	$C(4;1;0)$	$D(-3;0;2)$
20.	$A(-1;-2;-1)$	$B(2;3;-2)$	$C(-4;-1;2)$	$D(3;1;3)$
21.	$A(2;3;4)$	$B(-2;4;-1)$	$C(3;5;-4)$	$D(1;1;0)$
22.	$A(-3;0;-2)$	$B(1;1;-3)$	$C(0;3;2)$	$D(2;-2;3)$
23.	$A(4;-4;1)$	$B(0;-2;-1)$	$C(4;2;1)$	$D(3;3;-2)$
24.	$A(-2;-2;0)$	$B(4;1;-1)$	$C(0;-3;1)$	$D(1;1;-2)$
25.	$A(0;2;3)$	$B(4;1;0)$	$C(2;-2;-2)$	$D(1;2;-3)$
26.	$A(3;0;0)$	$B(-2;2;-3)$	$C(1;2;1)$	$D(-2;4;4)$
27.	$A(3;-1;-1)$	$B(2;2;-4)$	$C(1;-1;-1)$	$D(2;0;-2)$
28.	$A(-4;-2;1)$	$B(-1;0;0)$	$C(2;0;-3)$	$D(0;-1;-2)$
29.	$A(3;-2;-3)$	$B(0;1;-2)$	$C(2;-2;-4)$	$D(0;0;4)$
30.	$A(1;-2;-1)$	$B(2;2;2)$	$C(3;-3;1)$	$D(-1;-2;-3)$

3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.

3.1.Різні види рівняння прямої на площині. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, точка перетину прямих.

Канонічне рівняння прямої або рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до заданого вектора $\vec{s} = (m; n)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (34)$$

Вектор $\vec{s} = (m; n)$, паралельний до даної прямої, називається її напрямним вектором.

Параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \end{cases} \quad t - \text{параметр}. \quad (35)$$

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (36)$$

Вектор $\vec{n} = (A; B)$, перпендикулярний до даної прямої, називається її нормальним вектором.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k :

$$y = kx + b, \quad (37)$$

де $k = \tan \alpha$, α – кут, утворений прямою з додатнім напрямом осі Ox ,
 b – відрізок, який відтинає пряма на осі Oy .

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k :

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (38)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (39)$$

Рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (40)$$

де a та b відрізки, які відтинає пряма на осях координат Ox , Oy відповідно.

Загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0. \quad (41)$$

Із загального рівняння прямої можна визначити:

$\vec{n} = (A; B)$ – нормальний вектор прямої;

$\vec{s} = (B; -A)$ – напрямний вектор прямої;

$k = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B} (B \neq 0)$ – кутовий коефіцієнт прямої.

Взаємне розташування двох прямих.

Тип рівняння	Кут між прямими	Умова паралельності	Умова перпендикулярності
$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$	$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$	$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$
$l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ $l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$
$l_1: y = k_1 x + b_1;$ $l_2: y = k_2 x + b_2$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$	$k_1 = k_2$	$k_2 = -\frac{1}{k_1};$ $(1 + k_1 k_2 = 0)$

Точку перетину двох прямих знаходять із системи:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (42)$$

При цьому можливі три випадки:

1) Прямі перетинаються, тобто вектори $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ не колінеарні: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Система має єдиний розв'язок.

2) Прямі паралельні, отже вектори $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ колінеарні і $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, але прямі різні, тому $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ – система не має розв'язку.

3) Прямі співпадають, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Система має нескінченну кількість розв'язків.

Відстань від точки до прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (43)$$

3.2. Рівняння площини та рівняння прямої у просторі.

Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно до заданого вектора (**нормальний** вектор площини) $\vec{n}(A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (44)$$

Зауваження. Якщо $\vec{n}(A; B; C)$ – нормальний вектор площини α , то і будь-який вектор $(\lambda A; \lambda B; \lambda C)$ ($\lambda \neq 0$) також є вектором, перпендикулярним площині α .

Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (45)$$

де хоча б один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю, причому коефіцієнти A, B, C — координати нормального вектора $\vec{n}(A; B; C)$.

Рівняння площини у відрізках на осях.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (46)$$

a, b, c – відрізки, які відтинає площина на осях координат.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що належать площині α і не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначають за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (48)$$

Кут φ між двома площинами, які задані загальними рівняннями

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \quad & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1(A_1, B_1, C_1) \\ \alpha_2 : \quad & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2) \end{aligned}$$

обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (49)$$

Умова паралельності двох площин.

Якщо площини $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (50)$$

Умова перпендикулярності двох площин.

Якщо площини $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то перпендикулярні їх нормальні вектори, тобто $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, (і навпаки). Тому

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (51)$$

Дві площини збігаються, якщо справджуються рівності

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (52)$$

Канонічне рівняння прямої або рівняннями прямої у просторі, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (53)$$

Параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (54)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, які належать прямій l :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (55)$$

Загальне рівняння прямої:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (56)$$

Це випадок, коли пряма в просторі задається перетином двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин, нормальні вектори яких $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Від загального рівняння можна перейти до канонічного рівняння, якщо нормальні вектори заданих площин $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то напрямний вектор прямої дорівнює векторному добутку нормальних векторів площин:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій вибираємо довільно.

Кут між двома прямими, які задані канонічними рівняннями

$$\begin{aligned} l_1: \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \vec{s}_1(m_1, n_1, p_1) \\ l_2: \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \quad \vec{s}_2(m_2, n_2, p_2) \end{aligned}$$

обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (57)$$

Умова паралельності двох прямих.

Якщо прямі l_1 та l_2 паралельні ($l_1 \parallel l_2$), то паралельні їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$, тобто $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, тоді

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (58)$$

Умова перпендикулярності двох прямих.

Якщо прямі l_1 та l_2 перпендикулярні ($l_1 \perp l_2$), то і їх напрямні вектори перпендикулярні, тобто $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ або $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, тоді

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (59)$$

Кут φ між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (60)$$

Умова паралельності прямої і площини.

Якщо пряма l паралельна площині α , то вектори $\vec{s}$ і $\vec{n}$ – перпендикулярні, а тому $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$, тоді

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (61)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини.

Якщо пряма l перпендикулярна до площини α , то вектори $\vec{s}$ і $\vec{n}$ паралельні $\vec{s} \parallel \vec{n}$, тоді

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (62)$$

Точка перетину прямої і площини знаходиться із системи:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt; \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (63)$$

3.3. Криві другого порядку.

Коло

Колом називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (центра).

Якщо центр кола точка $O(0;0)$, а радіус R , то його рівняння (рис. 12)

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (64)$$

Рівняння кола з центром в точці $C(x_0; y_0)$ і радіуса R (рис. 13):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (65)$$

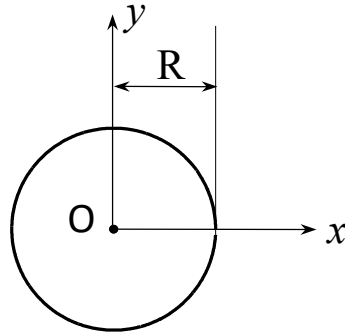


Рис. 12

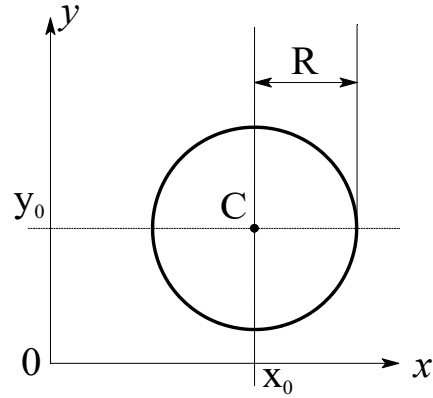


Рис. 13

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок на площині, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала.

Канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (66)$$

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ називаються вершинами еліпса.

$MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ – фокальні радіуси (рис. 14).

а) $r_1 + r_2 = 2a$.

$A_1A_2 = 2a$ – велика вісь, тоді $A_1O = A_2O = a$ – велика піввісь.

$B_1B_2 = 2b$ – мала вісь, тоді $B_1O = B_2O = b$ – мала піввісь.

$F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$.

$c^2 = a^2 - b^2$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса ($0 < \varepsilon < 1$, $c < a$).

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – рівняння директрис.

б) $r_1 + r_2 = 2b$.

$B_1B_2 = 2b$ – велика вісь, тоді $B_1O = B_2O = b$ – велика піввісь.

$A_1A_2 = 2a$ – мала вісь, тоді $A_1O = A_2O = a$ – мала піввісь.

$F_1 F_2 = 2c$ – відстань між фокусами $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$.

$c^2 = a^2 - b^2$; $\varepsilon = \frac{c}{b}$ – ексцентриситет еліпса ($0 < \varepsilon < 1, c < b$).

$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ – рівняння директрис.

Зазначимо, що фокуси еліпса завжди знаходяться на його великій осі.

При $a = b$ одержимо $x^2 + y^2 = a^2$ – рівняння кола.

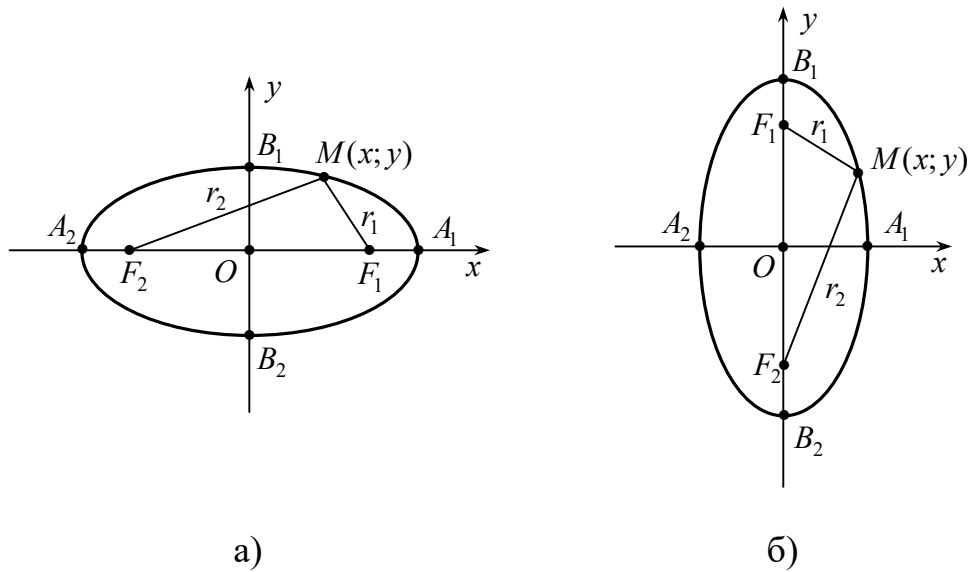


Рис. 14

Рівняння еліпса з центром у точці $C(x_0; y_0)$ та півосями a і b має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (67)$$

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок на площині, різниця відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала (рис. 15).

Канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (68)$$

а) для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини гіперболи.

$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь, тоді $A_1O = A_2O = a$ – дійсна піввісь.

$B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь, тоді $B_1O = B_2O = b$ – уявна піввісь.

$F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$.

$c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет гіперболи ($\varepsilon > 1$, бо $c > a$).

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – рівняння директрис.

б) для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

$$r_1 - r_2 = \pm 2b.$$

Точки $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ – вершини гіперболи.

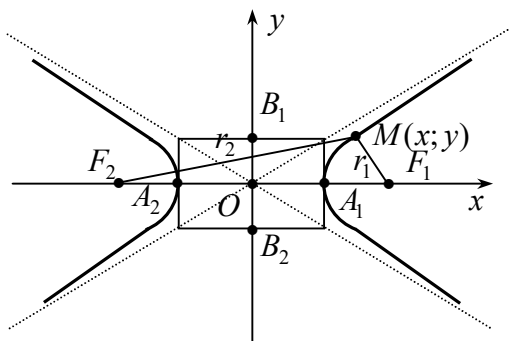
$B_1B_2 = 2b$ – дійсна вісь, тоді $B_1O = B_2O = b$ – дійсна піввісь.

$A_1A_2 = 2a$ – уявна вісь, тоді $A_1O = A_2O = a$ – уявна піввісь.

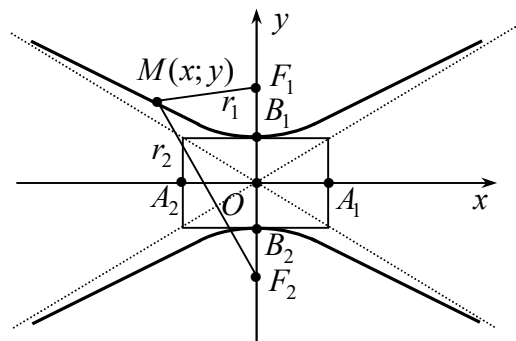
$F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами $F_1(0;c)$ і $F_2(0;-c)$.

$c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \frac{c}{b}$ – ексцентриситет гіперболи ($\varepsilon > 1$, бо $c > b$).

$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ – рівняння директрис.



а)



б)

Рис. 15

Гіпербола має похилі асимптоти (прямі, до яких гілки гіперболи наближаються нескінченно близько, але не торкаються їх), що задаються рівняннями: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Слід зазначити, що фокуси гіперболи завжди знаходяться на її дійсній осі. Гіперболу, в якій $a = b$, називають рівнобічною і її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$ або $x^2 - y^2 = -a^2$.

Рівняння гіперболи з центром у точці $C(x_0; y_0)$ та півосями a і b

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (69)$$

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи

$$y^2 = \pm 2px \text{ або } x^2 = \pm 2py, \quad (70)$$

p – відстань від фокуса до директриси.

Точка $O(0;0)$ – вершина параболи, $MF = r$ – фокальний радіус, d – відстань від точки $M(x; y)$ до директриси (рис. 16).

За означенням параболи $r = d$.

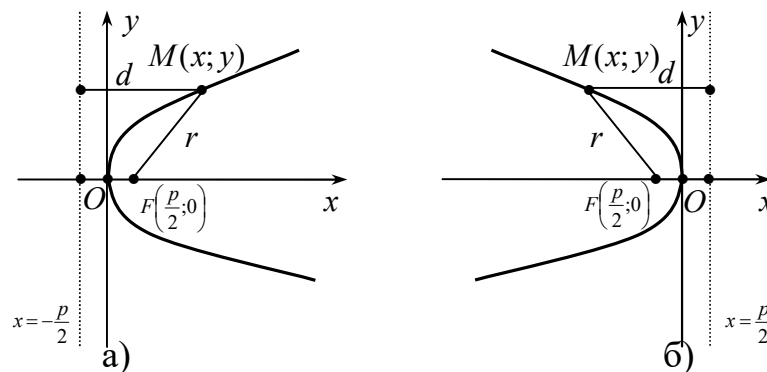


Рис. 16

Для парабол $y^2 = \pm 2px$ рівняння директрис $x = \pm \frac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(\pm \frac{p}{2}; 0\right)$ (рис. 16 а), б)).

Для парабол $x^2 = \pm 2py$ рівняння директрис $y = \pm \frac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(0; \pm \frac{p}{2}\right)$ (рис. 17 а), б)).

Ексцентриситет параболи завжди дорівнює одиниці: $\varepsilon = 1$.

Фокус параболи завжди знаходиться на її осі симетрії.

Рівняння параболи з вершинами у точці $C(x_0; y_0)$, симетричної відносно прямих $y = y_0$ та $x = x_0$ відповідно

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0), \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \quad (71)$$

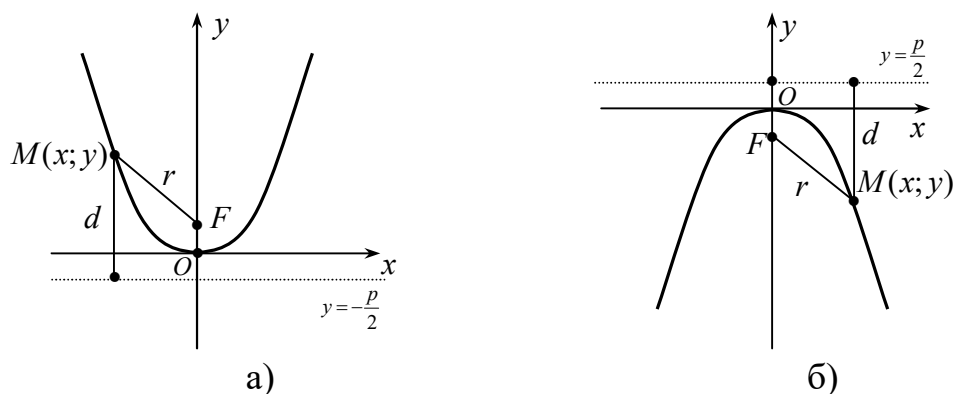


Рис. 17

3.4. Завдання для самостійної роботи з розділу «Елементи аналітичної геометрії».

1. Дано вершини трикутника: A, B, C . Необхідно:

- а) скласти рівняння сторони AB і визначити її кутовий коефіцієнт;
- б) скласти рівняння прямої, яка проведена з вершини C паралельно AB ;
- в) скласти рівняння прямої, яка проведена через середину сторони AB перпендикулярно AC ;

г) знайти довжину висоти трикутника, проведеної з вершини C ;

д) обчислити тангенс кута між прямими AC и BC .

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $A(5;-1), B(6;1), C(3;3)$. | 2) $A(4;-5), B(3;2), C(-6;5)$. |
| 3) $A(-12;-1), B(-12;2), C(6;-1)$. | 4) $A(2;0), B(-4;0), C(2;3)$. |
| 5) $A(7;-1), B(1;2), C(5;-2)$. | 6) $A(-10;6), B(-18;4), C(-6;5)$. |
| 7) $A(8;-2), B(2;0), C(7;1)$. | 8) $A(9;3), B(1;-3), C(-3;12)$. |
| 9) $A(-2;5), B(0;9), C(2;-3)$. | 10) $A(-4;6), B(8;-3), C(-1;6)$. |
| 11) $A(-3;0), B(-1;2), C(-2;-1)$. | 12) $A(0;4), B(6;1), C(-2;0)$. |
| 13) $A(9;-4), B(-9;2), C(3;-6)$. | 14) $A(5;7), B(4;1), C(-7;5)$. |
| 15) $A(11;-4), B(-7;2), C(10;-1)$. | 16) $A(4;2), B(9;-3), C(2;0)$. |
| 17) $A(3;-1), B(9;7), C(1;-1)$. | 18) $A(-2;0), B(2;8), C(0;-4)$. |
| 19) $A(6;-4), B(3;-4), C(6;2)$. | 20) $A(0;7), B(-2;-1), C(1;3)$. |
| 21) $A(-11;5), B(1;-4), C(-7;8)$. | 22) $A(-8;2), B(0;-4), C(-8;1)$. |
| 23) $A(-6;5), B(3;5), C(-6;2)$. | 24) $A(-5;2), B(5;12), C(-3;0)$. |
| 25) $A(6;4), B(6;-4), C(2;4)$. | 26) $A(1;7), B(-5;-11), C(0;10)$. |
| 27) $A(4;-3), B(12;-1), C(3;1)$. | 28) $A(-2;5), B(6;1), C(2;7)$. |
| 29) $A(9;10), B(3;8), C(10;7)$. | 30) $A(-1;5), B(-7;-3), C(4;5)$. |

2. Знайти гострий кут між прямими:

- | | |
|---|--|
| 1) $y = -2x + 1, \quad 3x - y + 5 = 0$. | 2) $4x + 2y - 5 = 0, \quad 6x + 3y + 1 = 0$. |
| 3) $2x - y - 7 = 0, \quad x + 4y + 2 = 0$. | 4) $y = 3x - 2, \quad 5x + 4y - 6 = 0$. |
| 5) $3x - 7y + 25 = 0, \quad x + 2y - 3 = 0$. | 6) $2x + 4y - 11 = 0, \quad 6x + 2y - 7 = 0$. |
| 7) $4x - 3y + 5 = 0, \quad 4x + 5y + 7 = 0$. | 8) $6x + 3y + 17 = 0, \quad y = -5x + 4$. |
| 9) $6x + 3y + 17 = 0, \quad y = -5x + 4$. | 10) $2x + 5y - 3 = 0, \quad 7x + 3y - 2 = 0$. |
| 11) $2x - 4y - 11 = 0, \quad 8x + y - 3 = 0$. | 12) $5x + y + 1 = 0, \quad 2x - y - 6 = 0$. |
| 13) $3x - 2y + 1 = 0, \quad x - y + 16 = 0$. | 14) $x + 7y - 4 = 0, \quad 3x - 4y + 20 = 0$. |
| 15) $x - 3y + 18 = 0, \quad 4x - 7y - 15 = 0$. | 16) $3x + 8y - 22 = 0, \quad x - 5y + 4 = 0$. |

- 17) $2x - 6y - 13 = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$. 18) $2x - 11y - 4 = 0$, $6x - 4y - 5 = 0$.
 19) $8x - 6y + 3 = 0$, $2x + 3y - 4 = 0$. 20) $x - 6y - 2 = 0$, $4x - 2y - 7 = 0$.
 21) $12x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y - 3 = 0$. 22) $3x + y - 8 = 0$, $4x + 18y + 7 = 0$.
 23) $6x - 4y + 11 = 0$, $10x + 2y - 1 = 0$. 24) $x - 7y - 2 = 0$, $3x - 4y + 3 = 0$.
 25) $3x - 6y + 4 = 0$, $5x + 2y + 14 = 0$. 26) $x + 9y - 8 = 0$, $4x - 5y + 2 = 0$.
 27) $5x - 3y - 1 = 0$, $7x - 11y + 4 = 0$. 28) $4x - 7y + 3 = 0$, $11x - 3y - 5 = 0$.
 29) $16x - 3y - 2 = 0$, $2x - 7y + 4 = 0$. 30) $4x - 6y + 13 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$.

3. Скласти рівняння сторін та діагоналей квадрата, якщо A – його вершина, M – точка перетину діагоналей.

- 1) $A(1;0), M(3;2)$. 2) $A(2;-1), M(4;1)$. 3) $A(0;3), M(-2;1)$.
 4) $A(-2;7), M(0;5)$. 5) $A(2;1), M(-1;-2)$. 6) $A(5;5), M(2;2)$.
 7) $A(4;1), M(6;3)$. 8) $A(-3;7), M(-6;4)$. 9) $A(1;0), M(-1;2)$.
 10) $A(-1;2), M(-2;3)$. 11) $A(-2;1), M(1;4)$. 12) $A(2;7), M(-1;4)$.
 13) $A(0;2), M(-1;-3)$. 14) $A(-1;-2), M(1;0)$. 15) $A(8;1), M(6;3)$.
 16) $A(3;-1), M(0;-3)$. 17) $A(-1;5), M(2;2)$. 18) $A(1;1), M(-1;-1)$.
 19) $A(4;-1), M(2;1)$. 20) $A(6;-1), M(4;1)$. 21) $A(0;7), M(2;5)$.
 22) $A(6;1), M(3;4)$. 23) $A(-4;2), M(-1;-1)$. 24) $A(2;3), M(0;5)$.
 25) $A(2;5), M(-1;-2)$. 26) $A(-3;1), M(-6;4)$. 27) $A(-2;7), M(1;4)$.
 28) $A(-3;0), M(-1;2)$. 29) $A(3;2), M(1;0)$. 30) $A(-4;3), M(-2;1)$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку P паралельно до площини α .

- 1) $P(-2;3;4)$, $\alpha: 2x + y - 4z + 12 = 0$
 2) $P(1;0;-4)$, $\alpha: 3x + y - 2z + 18 = 0$
 3) $P(5;-2;6)$, $\alpha: x - 3y + 3z - 14 = 0$
 4) $P(3;0;-4)$, $\alpha: 4x + 2y - 9z + 1 = 0$
 5) $P(-2;3;0)$, $\alpha: 5x - y - 2z + 6 = 0$
 6) $P(4;-1;-2)$, $\alpha: 6x - 2y + 5z - 8 = 0$
 7) $P(0;-4;7)$, $\alpha: x - y - 8z + 12 = 0$

- 8) $P(2;-4;-5), \quad \alpha : 6x - 3y - 4z + 16 = 0$
- 9) $P(-1;1;6), \quad \alpha : 3x - y + 5z - 11 = 0$
- 10) $P(4;-5;4), \quad \alpha : 2x + 4y - 5z + 17 = 0$
- 11) $P(2;-2;1), \quad \alpha : x - 7y + 2z - 15 = 0$
- 12) $P(7;-1;4), \quad \alpha : 9x - 7y + z - 13 = 0$
- 13) $P(6;-1;-2), \quad \alpha : 3x - 4y + 7z + 14 = 0$
- 14) $P(-2;3;-3), \quad \alpha : 7x + y - 2z + 1 = 0$
- 15) $P(-8;0;-4), \quad \alpha : 5x - y - 4z - 6 = 0$
- 16) $P(1;-1;7), \quad \alpha : 6x - 4y + 11z + 4 = 0$
- 17) $P(9;0;-2), \quad \alpha : 3x - 3y + 5z - 16 = 0$
- 18) $P(-1;-6;4), \quad \alpha : 7x - 2y + z + 8 = 0$
- 19) $P(2;-4;7), \quad \alpha : 6x - 8y - z - 9 = 0$
- 20) $P(-2;-5;6), \quad \alpha : 11x - y - 9z + 5 = 0$
- 21) $P(4;-5;0), \quad \alpha : 9x + 2y - 3z + 2 = 0$
- 22) $P(-6;-2;1), \quad \alpha : 5x - y - 7z + 4 = 0$
- 23) $P(13;0;-1), \quad \alpha : x - 12y + 2z - 4 = 0$
- 24) $P(-5;5;1), \quad \alpha : 8x - 3y + z + 9 = 0$
- 25) $P(-3;-2;6), \quad \alpha : 9x - 5y + 4z + 14 = 0$
- 26) $P(5;-4;-3), \quad \alpha : 7x - y + 7z + 4 = 0$
- 27) $P(0;-2;3), \quad \alpha : 11x - 7y - z + 16 = 0$
- 28) $P(4;-7;1), \quad \alpha : 9x + 6y - 2z - 2 = 0$
- 29) $P(6;-8;1), \quad \alpha : 13x - 6y + 4z - 3 = 0$
- 30) $P(-3;-2;5), \quad \alpha : x - 15y - 6z - 17 = 0$

5. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої:

- 1)
$$\begin{cases} 3x + y + 4z + 6 = 0, \\ 4x - y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$$

- 3) $\begin{cases} -2x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x + 2y - 3z - 4 = 0. \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} x - 5y + 3z - 11 = 0, \\ 2x + 3y - z - 3 = 0. \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} x - 4y + 4z - 10 = 0, \\ 2x + y - 2z - 6 = 0. \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 2x + 3y - z - 8 = 0. \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} x + 4y + z + 10 = 0, \\ 2x - y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$
- 13) $\begin{cases} x + 5y + 2z - 10 = 0, \\ 4x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$
- 15) $\begin{cases} x - 6y + 3z - 12 = 0, \\ 3x + 2y - 3z - 6 = 0. \end{cases}$
- 17) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 5 = 0, \\ 5x + y - 4z - 12 = 0. \end{cases}$
- 19) $\begin{cases} x + 3y + 2z + 6 = 0, \\ 2x + 2y - 3z - 6 = 0. \end{cases}$
- 21) $\begin{cases} x - 6y + 2z - 14 = 0, \\ 4x - y - 2z - 8 = 0. \end{cases}$
- 23) $\begin{cases} x - 3y + 3z - 7 = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0. \end{cases}$
- 25) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 15 = 0, \\ 2x + y - 3z - 4 = 0. \end{cases}$
- 27) $\begin{cases} 3x - 2y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z - 7 = 0. \end{cases}$
- 29) $\begin{cases} 4x - 2y + z - 10 = 0, \\ 2x + 3y - 2z - 12 = 0. \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x - 3y + 6z - 11 = 0, \\ x + 2y - 2z - 5 = 0. \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} x + 6y + 2z - 2 = 0, \\ 3x + y - 3z = 0. \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} x - 7y + 2z - 14 = 0, \\ 2x + 4y - z - 6 = 0. \end{cases}$
- 12) $\begin{cases} x - 4y - 4z + 10 = 0, \\ 2x - y + 2z + 6 = 0. \end{cases}$
- 14) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z - 15 = 0, \\ x + 2y - 2z - 10 = 0. \end{cases}$
- 16) $\begin{cases} 5x - y + 2z - 20 = 0, \\ 2x + 2y - z - 4 = 0. \end{cases}$
- 18) $\begin{cases} x + 3y + 3z - 9 = 0, \\ 4x + 2y - z - 7 = 0. \end{cases}$
- 20) $\begin{cases} x - 8y + 2z + 6 = 0, \\ 2x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$
- 22) $\begin{cases} x - 2y + 4z + 10 = 0, \\ 5x + y - 3z - 16 = 0. \end{cases}$
- 24) $\begin{cases} x - 2y + 4z - 2 = 0, \\ 3x + 2y - z - 36 = 0. \end{cases}$
- 26) $\begin{cases} x - y + z - 5 = 0, \\ 3x - 2y - 2z - 4 = 0. \end{cases}$
- 28) $\begin{cases} x - 2y + 4z - 12 = 0, \\ 2x + y - 2z - 6 = 0. \end{cases}$
- 30) $\begin{cases} x + 3y + 2z - 13 = 0, \\ 2x + y + z - 16 = 0. \end{cases}$

6. Знайти:

а) точку перетину прямої і площини;

б) кут між прямою і площиною;

в) точку, симетричну точці P відносно даної площини.

1) $P(1;3;-6), \quad l: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, \quad \alpha: x+2y+3z-14=0.$

2) $P(2;7;-4), \quad l: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, \quad \alpha: x+2y-5z+20=0.$

3) $P(6;-3;2), \quad l: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}, \quad \alpha: 2x-y+3z+23=0.$

4) $P(15;6;0), \quad l: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}, \quad \alpha: 2x-3y-5z-7=0.$

5) $P(0;10;-2), \quad l: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad \alpha: x-3y+7z-24=0.$

6) $P(7;2;-5), \quad l: \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, \quad \alpha: 3x+y-5z-12=0.$

7) $P(7;1;-1), \quad l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad \alpha: 4x-2y-z-11=0.$

8) $P(-4;6;6), \quad l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, \quad \alpha: 2x-y+4z=0.$

9) $P(-4;0;8), \quad l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, \quad \alpha: 3x-2y-4z-8=0.$

10) $P(-6;-3;-2), \quad l: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}, \quad \alpha: 3x-y+4z=0.$

11) $P(5;0;-6), \quad l: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad \alpha: x+3y-5z+9=0.$

12) $P(1;3;7), \quad l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}, \quad \alpha: x+2y-5z+16=0.$

13) $P(5;2;-2), \quad l: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad \alpha: x+2y-z-2=0.$

14) $P(-12;4;6), \quad l: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad \alpha: x-2y+5z+17=0.$

- 15) $P(2;4;8), \quad l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}, \quad \alpha: 3x-7y-2z+7=0.$
- 16) $P(9;5;-3), \quad l: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}, \quad \alpha: 5x-y+4z+3=0.$
- 17) $P(-2;-4;-6), \quad l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}, \quad \alpha: x+3y+5z-42=0.$
- 18) $P(9;0;-3), \quad l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1}, \quad \alpha: x-2y+4z-19=0.$
- 19) $P(5;-2;1), \quad l: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}, \quad \alpha: 7x+y+4z-47=0.$
- 20) $P(-5;1;-3), \quad l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}, \quad \alpha: 3x+4y+7z-16=0.$
- 21) $P(0;6;-8), \quad l: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, \quad \alpha: 2x+3y+7z-52=0.$
- 22) $P(-6;4;-2), \quad l: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, \quad \alpha: x+4y+13z-23=0$
- 23) $P(11;0;-1), \quad l: \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}, \quad \alpha: 3x-2y+5z-3=0.$
- 24) $P(7;0;-4), \quad l: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}, \quad \alpha: 5x+9y+4z-25=0.$
- 25) $P(-1;11;5), \quad l: \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}, \quad \alpha: 4x+y-6z-5=0.$
- 26) $P(0;13;-16), \quad l: \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}, \quad \alpha: 3x+7y-5z-11=0.$
- 27) $P(7;5;-3), \quad l: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}, \quad \alpha: 5x+7y+9z-32=0.$
- 28) $P(4;12;-2), \quad l: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, \quad \alpha: x-7y+3z+11=0.$
- 29) $P(2;2;-4), \quad l: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}, \quad \alpha: 2x-5y+4z+24=0.$
- 30) $P(11;4;-3), \quad l: \frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}, \quad \alpha: x-2y-3z+18=0.$

7. Відомі координати чотирьох вершин піраміди $ABCS$.

Потрібно знайти:

а) відстань від вершини S до площини ABC ;

б) косинус кута між площинами ABC та ABS ;

в) косинус кута між ребрами AC та AS .

- 1) $A(1;2;-3), B(3;5;4), C(4;-5;4), S(-3;3;6)$
- 2) $A(-1;0;0), B(1;1;3), C(-1;2;1), S(-1;3;-1)$
- 3) $A(-1;4;3), B(3;5;-4), C(4;7;4), S(3;3;6)$
- 4) $A(-1;1;1), B(0;1;4), C(-1;-3;1), S(3;3;2)$
- 5) $A(2;-2;0), B(1;1;-1), C(2;1;1), S(3;3;-2)$
- 6) $A(1;-2;-2), B(3;1;-1), C(2;2;2), S(1;0;-1)$
- 7) $A(3;1;0), B(2;1;3), C(-1;4;0), S(1;1;-1)$
- 8) $A(3;-5;-4), B(2;4;1), C(0;1;3), S(2;-2;-2)$
- 9) $A(4;5;1), B(1;0;1), C(-2;-1;3), S(2;-2;0)$
- 10) $A(-3;3;0), B(1;-2;1), C(3;1;4), S(1;2;-3)$
- 11) $A(5;0;-2), B(3;-2;4), C(1;1;2), S(-2;1;1)$
- 12) $A(6;1;2), B(1;2;-3), C(2;1;-1), S(-2;3;3)$
- 13) $A(5;1;1), B(3;2;-2), C(4;-2;0), S(1;1;2)$
- 14) $A(3;-3;0), B(0;1;-2), C(2;2;5), S(-4;2;1)$
- 15) $A(3;-4;-1), B(4;2;-2), C(5;-1;-2), S(0;-3;1)$
- 16) $A(4;3;-2), B(-2;3;4), C(5;1;1), S(2;-3;-3)$
- 17) $A(6;1;-2), B(7;3;-1), C(2;2;2), S(3;-3;1)$
- 18) $A(4;2;2), B(6;2;3), C(-2;1;-1), S(-3;1;0)$
- 19) $A(-1;2;3), B(1;2;3), C(4;2;4), S(2;-1;-3)$
- 20) $A(3;-3;2), B(4;-2;-1), C(2;-1;2), S(3;3;1)$
- 21) $A(-5;0;1), B(4;0;-1), C(2;3;-2), S(4;3;4)$
- 22) $A(2;3;4), B(4;2;1), C(-1;-1;-1), S(2;4;-4)$

- 23) $A(4;2;2), B(-1;1;-1), C(2;0;1), S(2;-2;1)$
 24) $A(5;-4;-4), B(1;-1;-1), C(1;2;3), S(-1;1;4)$
 25) $A(4;-4;0), B(0;2;3), C(1;4;2), S(-1;5;0)$
 26) $A(7;1;0), B(2;2;1), C(-1;2;3), S(1;-1;2)$
 27) $A(4;5;3), B(2;3;3), C(1;-2;-3), S(-2;1;1)$
 28) $A(-2;-4;-1), B(1;2;3), C(2;2;2), S(-1;3;4)$
 29) $A(2;2;0), B(1;1;3), C(3;2;-1), S(2;-1;0)$
 30) $A(2;-2;2), B(2;3;4), C(4;5;1), S(-1;3;4)$

8. Привести рівняння ліній другого порядку до канонічного вигляду. Визначити тип ліній та побудувати їх. Залежно від одержаного результату знайти: а) координати центра кола та його радіус; б) координати центра еліпса, довжину пів осей та ексцентриситет еліпса; в) координати центра гіперболи, довжину пів осей та ексцентриситет гіперболи; г) координати вершини параболи, величину параметра та рівняння директрис параболи.

- 1 1) $x^2 + 2x + y^2 - 12y + 33 = 0$
 2) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$
 3) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 108 = 0$
 4) $x^2 - 2x - 4y - 7 = 0$
- 2 1) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 25 = 0$
 2) $9x^2 - 36x + 16y^2 - 96y + 36 = 0$
 3) $9x^2 - 4y^2 + 72x + 8y + 104 = 0$
 4) $x - y^2 + 6y - 4 = 0$
- 3 1) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$
 2) $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y - 59 = 0$
 3) $4x^2 - 25y^2 - 150y - 325 = 0$

- 4) $2x^2 + 16x - 3y + 41 = 0$
- 4 1) $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 41 = 0$
- 2) $2x^2 + 9y^2 + 90y + 207 = 0$
- 3) $4x^2 - 9y^2 + 24x + 72y - 144 = 0$
- 4) $2x - y^2 - 8x - 4 = 0$
- 5 1) $2x^2 + 2y^2 + 16x - 12y + 42 = 0$
- 2) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$
- 3) $9x^2 - 36y^2 + 90x - 216y + 225 = 0$
- 4) $3x^2 - 6x - y + 3 = 0$
- 6 1) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 12 = 0$
- 2) $x^2 + 9y^2 + 10x - 36y + 25 = 0$
- 3) $4x^2 - 36y^2 - 16x - 288y - 416 = 0$
- 4) $2x^2 - 4y + 20 = 0$
- 7 1) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 19 = 0$
- 2) $x^2 + 16y^2 + 6x - 128y + 121 = 0$
- 3) $9x^2 - 4y^2 - 16y + 20 = 0$
- 4) $y^2 - x + 6y + 13 = 0$
- 8 1) $2x^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$
- 2) $25x^2 + 9y^2 - 200x - 19y + 184 = 0$
- 3) $9x^2 - 25y^2 + 126x + 50y + 191 = 0$
- 4) $2x^2 - 20x - y + 57 = 0$
- 9 1) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y + 36 = 0$
- 2) $4x^2 + y^2 + 56x - 6y + 169 = 0$
- 3) $4x^2 - 49y^2 - 16x - 98y - 229 = 0$

- 4) $4x^2 + 8x + y + 1 = 0$
- 10 1) $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$
- 2) $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 131 = 0$
- 3) $2x^2 - 4y^2 - 12x - 16y - 6 = 0$
- 4) $6x - y^2 - 6y - 15 = 0$
- 11 1) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
- 2) $25x^2 + 16y^2 - 50x - 96y - 231 = 0$
- 3) $16x^2 - 49y^2 - 32x - 490y - 425 = 0$
- 4) $x^2 - 8x - 5y + 26 = 0$
- 12 1) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 10 = 0$
- 2) $4x^2 + y^2 + 32x + 54y + 109 = 0$
- 3) $4x^2 - 16y^2 + 24x + 64y - 92 = 0$
- 4) $5x^2 + 30x - y + 45 = 0$
- 13 1) $x^2 + y^2 + 14x - 8y + 61 = 0$
- 2) $x^2 + 16y^2 - 2x - 64y - 79 = 0$
- 3) $4x^2 - 49y^2 + 40x - 96 = 0$
- 4) $4x^2 - 49y^2 + 40x - 96 = 0$
- 14 1) $x^2 + y^2 - 14y + 24 = 0$
- 2) $9x^2 + 49y^2 - 54x - 360 = 0$
- 3) $9x^2 - 25y^2 + 54x + 100y - 244 = 0$
- 4) $x^2 - 8x - 3y + 19 = 0$
- 15 1) $2x^2 + 2y^2 - 16x - 4y - 16 = 0$
- 2) $4x^2 + y^2 + 32x - 2y + 49 = 0$
- 3) $4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 176 = 0$

- 4) $2x^2 - 24x - y + 65 = 0$
- 16 1) $3x^2 + 3y^2 + 30y + 63 = 0$
- 2) $36x^2 + 25y^2 - 504x + 150y + 1089 = 0$
- 3) $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$
- 4) $2y^2 - x + 8y + 8 = 0$
- 17 1) $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$
- 2) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 72y + 64 = 0$
- 3) $4x^2 - 144y^2 - 8x - 288y - 716 = 0$
- 4) $12x^2 - 24x - y + 8 = 0$
- 18 1) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 48 = 0$
- 2) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$
- 3) $25x^2 - 36y^2 + 100x + 72y - 836 = 0$
- 4) $x^2 - 12x - 8y + 20 = 0$
- 19 1) $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 30 = 0$
- 2) $16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y - 311 = 0$
- 3) $4x^2 - 121y^2 - 8x - 117 = 0$
- 4) $3x - y^2 - 4y - 7 = 0$
- 20 1) $x^2 + y^2 + 16x - 2y + 56 = 0$
- 2) $x^2 + 16y^2 - 6x + 64y - 71 = 0$
- 3) $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 151 = 0$
- 4) $2x^2 + 24x - y + 72 = 0$
- 21 1) $3x^2 + 3y^2 + 12x - 36y + 72 = 0$
- 2) $49x^2 + 16y^2 + 98x + 96y - 591 = 0$
- 3) $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 101 = 0$

- 4) $x^2 - 8x - 5y + 41 = 0$
- 22 1) $x^2 + y^2 + 14y + 24 = 0$
- 2) $9x^2 + y^2 + 54x - 10y + 70 = 0$
- 3) $9x^2 - 49y^2 - 90x - 294y + 225 = 0$
- 4) $x^2 - 6x - 6y - 15 = 0$
- 23 1) $4x^2 + 4y^2 - 32x + 28 = 0$
- 2) $4x^2 + y^2 - 32x + 6y - 71 = 0$
- 3) $x^2 - 9y^2 - 2x - 36y - 116 = 0$
- 4) $-y^2 + 3x - 4y + 5 = 0$
- 24 1) $5x^2 + 5y^2 - 10y - 15 = 0$
- 2) $x^2 + 4y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$
- 3) $x^2 - 9y^2 - 6x - 18y + 36 = 0$
- 4) $x^2 - 8x - 7y + 2 = 0$
- 25 1) $x^2 + y^2 - 8x - 48 = 0$
- 2) $25x^2 + 4y^2 - 100x + 32y + 64 = 0$
- 3) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 23 = 0$
- 4) $3x^2 - 6x - y + 9 = 0$
- 26 1) $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 28 = 0$
- 2) $x^2 + 4y^2 - 14x - 8y + 17 = 0$
- 3) $x^2 - 16y^2 + 12x - 96y - 252 = 0$
- 4) $x - 2y^2 + 12y - 14 = 0$
- 27 1) $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 20 = 0$
- 2) $16x^2 + 121y^2 + 64x - 242y - 1751 = 0$
- 3) $x^2 - 9y^2 + 4x + 54y + 4 = 0$

- 4) $2x - 3y^2 - 4 = 0$
- 28 1) $2x^2 + 2y^2 - 16y + 14 = 0$
- 2) $9x^2 + y^2 + 54x - 12y + 36 = 0$
- 3) $9x^2 - 4y^2 + 90x - 24y - 189 = 0$
- 4) $4x - y^2 + 4y + 16 = 0$
- 29 1) $4x^2 + 4y^2 - 24x - 8y - 24 = 0$
- 2) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$
- 3) $x^2 - 9y^2 + 10x + 36y - 155 = 0$
- 4) $2x^2 - 24x - 3y + 75 = 0$
- 30 1) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 32 = 0$
- 2) $x^2 + 9y^2 + 6x - 12y - 36 = 0$
- 3) $4x^2 - 16y^2 - 16x - 192y - 624 = 0$
- 4) $x^2 - 10x - 2y + 37 = 0$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення матриці. Що називається її розмірністю, стовпцем, рядком?
2. Що таке квадратна, нульова, одинична матриці? Матриця рядок? Матриця стовпець?
3. Як виконується транспонування матриць? Як при цьому змінюються діагональна, симетрична матриці?
4. Що таке добуток матриці на число і матриці на матрицю? Коли дві матриці можна додати і як виконується ця операція?
5. В якому випадку дві матриці можна перемножити? Як виконується множення матриць?
6. Як обчислюються визначники другого і третього порядків?
7. Запишіть формулу розкладу визначника за елементами рядка(стовпця).
8. Сформулюйте властивості визначників.
9. Як обчислити мінор визначника?
10. Що таке обернена матриця і для матриць вона існує?
11. Як обчислюється обернена матриця?
12. Що називають рангом матриці і як він може бути обчислений?
13. Що таке елементарні перетворення матриць?
14. Як записується СЛАР у матричній формі?
15. У чому полягає матричний метод розв'язання СЛАР?
16. У чому полягає метод Крамера розв'язання СЛАР? Чому метод Крамера можна використовувати не для всіх СЛАР?
17. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
18. У чому полягають прямий та зворотній ходи метода Гаусса?
19. Дайте означення вектора і його довжини.
20. Які вектори називають колінеарними, компланарними, рівними між собою?
21. Що називається базисом на площині та у просторі?

22. Як розкласти вектор за координатним базисом?
23. Що називається проекцією вектора на вісь?
24. Яка система координат називається правою?
25. Що називається напрямними косинусами вектора?
26. Як визначаються координати вектора?
27. Записати формули для координат точки, яка ділить відрізок у даному відношенні.
28. Як визначаються операції додавання, віднімання, множення на число?
29. Що називається скалярним добутком двох векторів?
30. Сформулювати властивості скалярного добутку.
31. Сформулювати необхідну і достатню умову перпендикулярності двох векторів, заданих координатами.
32. Записати формулу кута між двома векторами, заданих координатами.
33. Дати означення векторного добутку двох векторів.
34. Сформулювати властивості векторного добутку.
35. Записати формулу для обчислення векторного добутку двох векторів, заданих своїми декартовими координатами.
36. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
37. Як обчислюється мішаний добуток трьох векторів заданих координатами в прямокутній системі координат?
38. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
39. Як скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно вектору?
40. Який вид має рівняння прямої в загальному вигляді?
41. Який вид має рівняння прямої у відрізках?
42. Який вид має параметричне рівняння прямої?
43. Який вид має канонічне рівняння прямої?
44. Який вид має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

45. Як визначити кут між прямими?
46. Як визначити кут між прямими, якщо вони задані канонічними рівняннями?
47. Який вид має рівняння прямої, яка проходить через дві точки?
48. Як обчислити відстань від заданої точки до прямої?
49. Який вид має загальне рівняння площини?
50. Який вид має рівняння площини у відрізках?
51. Який вид має рівняння площини, що проходить через три точки?
52. Як визначити кут між площинами?
53. Як скласти рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору?
54. Як знайти точку перетину прямої з площиною?
55. Як довести, що прямі паралельні?
56. Як довести, що прямі перпендикулярні?
57. Як довести паралельність прямої і площини
58. Як обчислити кут між прямою і площиною?
59. Як визначити відстань від точки до площини?
60. Наведіть канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболі.
61. Як знайти ексцентриситет еліпсу?
62. Як знайти асимптоти гіперболи?

ЛІТЕРАТУРА

1. Валєєв К. Г. Математичний практикум / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова : навч. посібник. – К. : КНЕУ, 2004. - 682 с.
2. Герасимчук В. С. Курс класичної математики в прикладах і задачах : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — У 3 ч. Ч. 1. — Донецьк, ДонНТУ, 2005. — 584 с.
3. Гриньов, Б. В., Кириченко І.К. Векторна алгебра: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / За ред. О. М. Литвина. – Харків: Гімназія, 2008. – 164 с.
4. Гриньов, Б. В., Кириченко І.К. Аналітична геометрія: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / За ред. О. М. Литвина. – Харків: Гімназія, 2008. – 340 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
6. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі /Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін : посібник. - К.: Академія, 2002. - 624 с.
7. Зайцев О.П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до матаналізу. – навч. посібник. – К.: Алерта, 2017. – 574 с.
8. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К. : Вища шк., 2001. – 303 с.
9. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / За редакцією Ю. К. Рудавського. – Львів : Бескид БіТ, 2002. – 256 с.
10. Кадубовський О.А., Кадубовська О.Л., Плєсканьова Л.Г. Аналітична геометрія. Частина І: Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі: Навчальний посібник – Видання 2-е, виправлене та доповнене. – Слов'янськ, 2010. – 84 с.

11. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.
12. Лиман Ф. М. Вища математика / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова : навч. посібник. - Суми : СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2002. — Ч. 1.- 224 с.
13. Овчинников, П.П. Вища математика: Підручник: у 2 ч. / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — 2-е вид. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.
14. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. — Рівне : НУВГП, 2020. — 205 с.
15. Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Навчальний посібник // Укл. Пукальський І.Д., Перун Г.М.. — Чернівці: Рута, 2002. — 108 с.
16. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. — Львів : Бескид БіТ, 2002. — 262 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійної роботи з дисципліни
«Вища математика» за розділами «Лінійна алгебра», «Векторна
алгебра», «Аналітична геометрія» для здобувачів:
рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
галузь знань 14 «Електрична інженерія»
спеціальність 142 «Енергетичне машинобудування»
освітньо-професійні програми:
«Автомобільні двигуни», «Технічне обслуговування і діагностика
автомобільних двигунів», «Гібридні та електричні автомобільні енергетичні
установки»

Укладачі:

Людмила ШЕВЧУК;
Наталія ШЛЮНЬ;
Юлія ЗАЄЦЬ;
Людмила ЛЕВКІВСЬКА