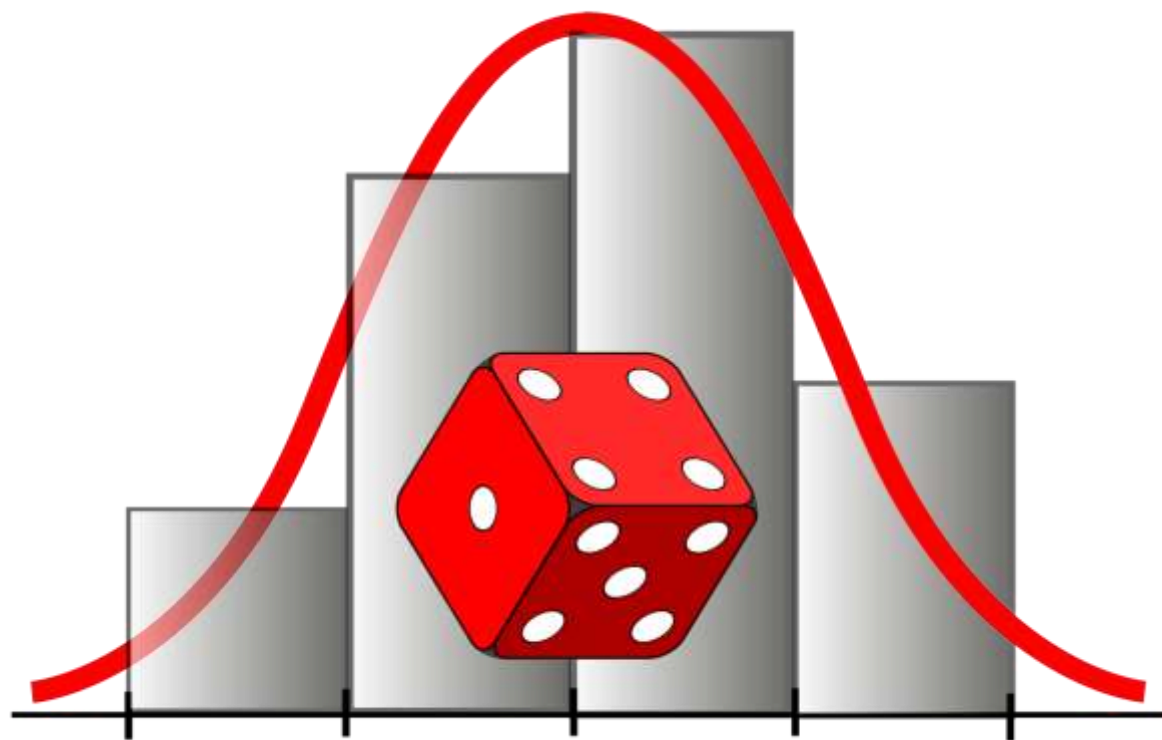


Левківська Л.В., Шевчук Л.В.



НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з дисципліни
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»





МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет транспортних та інформаційних технологій
Кафедра вищої математики

Левківська Л.В., Шевчук Л.В.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з дисципліни
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

для здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти,
галузі знань Д «Бізнес, адміністрування та право»,
спеціальності Д1 «Облік і оподаткування»

КИЇВ – 2025

УДК 519.2(07)

Л34

Левківська Л.В., Шевчук Л.В.

Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, галузі знань Д «Бізнес, адміністрування та право», спеціальності Д1 «Облік і оподаткування» – К. : НТУ, 2025. – 128с.

Рецензенти:

*Гавриленко В.В., доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри інформаційних систем і технологій
Національного транспортного університету;*

*Мейш Ю.А., доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри вищої та прикладної математики
Національного університету біоресурсів і природокористування України*

*Рекомендовано до друку Вченою Радою
Національного транспортного університету
(протокол № 3 від «27» березня 2025 р.)*

Розробники:

к.т.н., доцент кафедри вищої математики Людмила ЛЕВКІВСЬКА

к.т.н., доцент кафедри вищої математики Людмила ШЕВЧУК

© Л.В. Левківська, Л.В. Шевчук, 2025р.

© Національний транспортний університет, 2025р.

Вступ	5
Розділ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ.....	6
1.1 Предмет теорії ймовірностей.....	6
1.2 Випадкові події та їх класифікація.....	7
1.3 Класичне означення ймовірності появи події.....	8
1.4 Формули і правила комбінаторики та їх застосування під час обчислення ймовірності.....	9
1.5 Геометричне означення ймовірності.....	13
1.6 Статистичне означення ймовірності.....	14
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>16</i>
<i>Задачі для аудиторної роботи.....</i>	<i>16</i>
<i>Задачі для домашньої роботи.....</i>	<i>19</i>
<i>Індивідуальні завдання до розділу 1.....</i>	<i>21</i>
Розділ 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	28
2.1 Теореми додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій.....	28
2.2 Теореми множення ймовірностей для незалежних та залежних подій.....	30
2.3 Теорема обчислення ймовірності появи хоча б однієї події	32
2.4 Формула повної ймовірності	34
2.5 Ймовірність гіпотез. Формула Байєса	35
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>37</i>
<i>Задачі для аудиторної роботи.....</i>	<i>38</i>
<i>Задачі для домашньої роботи.....</i>	<i>42</i>
<i>Індивідуальні завдання до розділу 2.....</i>	<i>43</i>
Розділ 3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ	54
3.1 Схема Бернуллі	54
3.2 Найімовірніше настання події під час повторних випробувань.....	56
3.3 Локальна теорема Муавра-Лапласа	58
3.4 Інтегральна теорема Муавра-Лапласа	59
3.5 Теорема Пуассона	60
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>60</i>
<i>Задачі для аудиторної роботи.....</i>	<i>61</i>
<i>Задачі для домашньої роботи.....</i>	<i>62</i>
<i>Індивідуальні завдання до розділу 3.....</i>	<i>63</i>

Розділ 4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ	70
4.1 Види випадкових величин та способи їх задання.....	70
4.2 Загальні закони розподілу дискретних випадкових величин.....	71
4.3 Функція та щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величин.....	73
4.4 Числові характеристики випадкових величин.....	76
<i>Запитання для самоконтролю</i>	80
<i>Задачі для аудиторної роботи</i>	81
<i>Задачі для домашньої роботи</i>	84
<i>Індивідуальні завдання до розділу 4</i>	86
Розділ 5. СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ ВИБІРКИ	93
5.1 Основні задачі математичної статистики	93
5.2 Генеральна та вибіркова сукупності	94
5.3 Статистичний ряд та його графічне представлення.....	95
5.4 Емпірична функція розподілу та її властивості.....	99
5.5 Числові характеристики вибірки.....	101
<i>Запитання для самоконтролю</i>	104
<i>Задачі для аудиторної роботи</i>	105
<i>Задачі для домашньої роботи</i>	106
<i>Індивідуальні завдання до розділу 5</i>	107
Розділ 6. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ	109
6.1 Поняття статистичних оцінок.....	109
6.2 Точкові оцінки параметрів розподілу та властивості їх якості.....	109
6.3 Точкове оцінювання математичного сподівання й дисперсії.....	111
6.4 Поняття інтервальних оцінок.....	113
6.5 Інтервальні оцінки параметрів нормально розподіленої генеральної сукупності.....	114
<i>Запитання для самоконтролю</i>	118
<i>Задачі для аудиторної роботи</i>	119
<i>Задачі для домашньої роботи</i>	121
<i>Індивідуальні завдання до розділу 6</i>	122
Додатки (таблиці 1 – 5).....	124
Список рекомендованої та використаної літератури.....	128

«Вірогідне нам завжди здається неймовірним...»

Еріх Марія Ремарк

*«Хто в справах своїх не вміє бути гарним бухгалтером,
той буде бродити як сліпий у пільмі, навання,
і не минути йому великих збитків»*

Лука Пачолі

ВСТУП

Облік і оподаткування – унікальна завжди затребувана спеціальність, яка пов'язана зі створенням та управлінням інформацією про усі, без винятку, процеси в діяльності сучасного підприємства та держави в цілому.

Фахівець з обліку та оподаткування – незамінний працівник на будь-якому підприємстві. Він веде фінансовий, управлінський та податковий облік господарських операцій компанії, здійснює аналіз і аудит фінансової звітності та визначає її облікову політику, організовує роботу контрольно-ревізійних груп, займається впровадженням прогресивних форм і методів бухгалтерського обліку. Важко переоцінити роль, яку відіграють облікові працівники, задовольняючи інформаційні потреби на всіх рівнях управління, забезпечуючи можливість прийняття адекватних управлінських рішень у мінливому ринковому середовищі.

«Теорія ймовірностей та математична статистика» займає важливе місце у навчальному процесі підготовки бакалавра з обліку та оподаткування, оскільки формує базові знання у сфері застосування ймовірнісно-статистичного апарата для розв'язування теоретичних і практичних задач у професійній діяльності, сприяє подальшому розвитку логічного мислення та оволодінню основними методами дослідження і розв'язування практичних та прикладних задач у сфері обліку, аналізу, контролю, аудиту, оподаткування.

Мета даного навчального посібника – ознайомити студентів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей і математичної статистики, допомогти їм набути первинних навичок застосування теоретичного матеріалу на практиці, сформулювати вміння проводити комплексний статистичний аналіз математичних моделей, що описують реальні соціально-економічні явища і процеси.

Посібник складається з 6-ти розділів. Представлений матеріал відповідає змісту та послідовності викладення його на лекційних та практичних заняттях. До кожного теоретичного розділу наведено детальні алгоритми розв'язання основних задач, підібрано значну кількість завдань для аудиторної, домашньої та індивідуальної роботи студентів. Для кращого сприйняття матеріалу всі необхідні теоретичні відомості, представлені у даному посібнику, проілюстровані великою кількістю розв'язаних прикладів. У кінці кожного розділу представлені питання для самоперевірки рівня засвоєння матеріалу. У додатках наведено необхідний довідковий матеріал. Така побудова книги сприяє кращому засвоєнню програмного матеріалу, як під час аудиторних занять, так і при самопідготовці.

Даний посібник є гарною основою для отримання теоретичних знань студентами, сприятиме виробленню умінь і навичок щодо їхнього використання на практиці у сфері обліку, аналізу, аудиту та оподаткування.

Розділ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

1.1 Предмет теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності притаманні масовим випадковим явищам.

Предметом теорії ймовірностей є математичні моделі випадкових явищ. При цьому під випадковим явищем розуміють явище, передбачити результат якого неможливо. **Приклади випадкових явищ:** випадання герба при підкиданні монети, виграш по купленому лотерейному квитку, тривалість роботи телевізора і т.п.

Метою теорії ймовірностей є здійснення прогнозу в області випадкових явищ, дослідження впливу на хід цих явищ, їх контроль, обмеження сфери дії випадковості. Нині немає практично жодної галузі науки, в якій не застосовувалися б імовірнісні методи.

Складність теорії ймовірностей полягає в тому, що об'єкти, які є предметом її вивчення, носять більш загальний характер і тому не настільки наочні, як, наприклад, об'єкти геометрії або механіки.

Прийнято вважати, що теорія ймовірностей своєму виникненню зобов'язана азартним іграм. Хоча, в будь-якому випадку, теорія ймовірностей і математична статистика з'явилися завдяки потребам практики.

Перші серйозні роботи по теорії ймовірностей як математичної науки були закладені в XVII ст. у працях Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, Я. Бернуллі. Пізніше, у XVIII – XIX ст. розвиток теорії ймовірностей спонукали задачі теорії стрільби, теорії похибок, проблеми демографії, тощо.

Визначна роль у розвитку теорії ймовірності належить знаменитому математику Лапласу. Він вперше систематично виклав основи теорії ймовірностей, довів одну з форм центральної граничної теореми (теорема Муавра-Лапласа) і показав практичне застосування теорії ймовірностей до конкретних задач, зокрема, до аналізу помилок спостережень при вимірюванні.

Вагоме значення для розвитку теорії ймовірностей мали і праці видатних математиків XX століття – С. Н. Бернштейна, О. Я. Хінчина, А. М. Колмогорова, Б. В. Гнеденко, Р. А. Фішера, Р. Е. Мізеса, К. Пірсона та ін.

Сучасний період розвитку теорії ймовірностей почався із установлення аксіоматики. Цього в першу чергу вимагала практика, тому що для успішного застосування теорії ймовірностей до фізики, біології й інших галузей науки, а також до техніки й військової справи необхідно було уточнити й привести в струнку систему її основні поняття. В наш час методи теорії ймовірностей широко застосовуються в теорії надійності, теорії масового обслуговування, теорії інформації, статистичній фізиці, математичній статистиці та інших галузях знань.

1.2 Випадкові події та їх класифікація

Основним операційним матеріалом для теорії ймовірностей є події. Внаслідок проведеного дослідження, яке ми будемо називати випробуванням, настає подія.

Сукупність усіх елементарних подій, пов'язаних з конкретним експериментом, позначають Ω і називають **множиною (або простором) елементарних подій**. Простір елементарних подій може містити скінчену, злічену або незлічену множину елементів.

Випадковою подією називають будь-який результат випробування, який може відбутися або не відбутися взагалі.

Прикладами випробувань, наприклад, є: постріл з гвинтівки, підкидання грального кубика. Їм відповідають такі випадкові події: попадання в ціль або промах, поява того чи іншого числа очок на верхній грані кубика.

Для позначення подій використовують великі літери латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$, а у випадку їх великої кількості – літери з індексами: $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Подію називають **достовірною**, якщо в даному випробуванні вона обов'язково настане і **неможливою**, якщо в даному випробуванні вона завідомо не може відбутися. Достовірну подію позначають U , а неможливу подію V .

Так, наприклад, при вилученні кулі з урни, в якій всі кулі білі подія U – виймуть білу кулю є достовірною подією; а подія V – виймуть чорну кулю – неможливою подією.

Дві події вважають **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої (не зможуть відбутися разом) в одному і тому ж випробуванні. В протилежному випадку події є **сумісними**.

Наприклад, якщо мають дві коробки деталей. Із кожної коробки вибирають навмання по одній деталі. В цьому разі вибір стандартної деталі і з першої коробки, і з другої – будуть подіями сумісними.

Дві події, які зустрічаються в одному випробуванні, називають **незалежними**, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулась чи не відбулась інша подія. В іншому випадку, події – **залежні**.

Події вважаються **протилежними**, якщо в даному випробуванні вони несумісні і одна з них обов'язково відбувається.

Подію, протилежну події A , позначають через $\bar{A}$.

Прикладами протилежних подій можуть бути влучення і промах при пострілі.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають **рівноможливими**, якщо жодна з цих подій не має переваги над іншою.

Наприклад, при підкиданні грального кубика ні одна із граней не має переваги перед іншою.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$, попарно несумісні та рівноможливі, утворюють **повну групу подій**, з яких хоча б одна неминуче відбудеться, тобто сума цих подій є подією достовірною.

Наприклад, підкидають шестигранний кубик. Позначимо події: A_1 – випала грань з цифрою 1; A_2 – випала грань з цифрою 2; A_3 – випала грань з цифрою 3; A_4 – випала грань з цифрою 4; A_5 – випала грань з цифрою 5; A_6 – випала грань з цифрою 6. Тоді події $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ утворюють повну групу подій.

1.3 Класичне означення ймовірності появи події

Мірою можливості появи події є її ймовірність. Це поняття належить до основних базових понять теорії ймовірностей.

У практичних застосуваннях здебільшого розглядають випробування, які зводяться до так званої *класичної схеми* і в яких обчислення ймовірності суттєво спрощується. Класична ймовірнісна схема стосується *випадкових подій*. Це події, які утворюють *повну групу, несумісні і рівноможливі*.

В умовах класичної ймовірнісної схеми **ймовірністю появи події A** називають відношення кількості сприятливих випадків до загальної кількості всіх рівноможливих випадків у даному експерименті, тобто:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

де m – кількість сприятливих випадків щодо появи події A ,

n – загальна кількість всіх рівноможливих випадків щодо події A .

Літера P походить від французького *probabilite* – ймовірність.

Приклад 1.1.

В сірниковій коробочці лежать 12 білих та 8 чорних гудзиків. Яка ймовірність того, що навмання виїнятий з коробочки гудзик буде білим?

Розв’язання: Нехай подія A – виїнятий гудзик білий.

Зрозуміло, що $n=12+8=20$ – кількість всіх рівноможливих випадків появи події.

Кількість сприятливих випадків появи події A згідно умови задачі складає 12, тобто $m=12$.

Отже, скориставшись формулою (1.1), маємо:

$$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

З класичного означення ймовірності випливають *наступні властивості*:

1. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, тобто:

$$P(U) = 1.$$

Якщо подія достовірна, то число сприятливих випадків дорівнює числу всіх рівноможливих, тобто $m=n$ і тому:

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто:

$$P(V) = 0.$$

Якщо подія неможлива, то ні один із результатів випробувань не сприяє появі події, тобто $m = 0$ і, отже:

$$P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Ймовірність випадкової події завжди має значення з проміжку від нуля до одиниці, тобто:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Випадковій події A сприяє лише частина із загального числа результатів випробувань. У цьому разі $0 \leq m \leq n$, а отже,

$$\frac{0}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n}, \quad \text{тобто} \quad 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Значення m і n знаходять або безпосередньо з умов випробування, або при розв'язуванні багатьох задач із застосуванням формул та правил комбінаторики.

1.4 Формули і правила комбінаторики та їх застосування під час обчислення ймовірності

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає питання розташування та вибору об'єктів за певними правилами, і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна зробити.

Основні формули комбінаторики:

1. Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину, що складається з n елементів. Кількість перестановок з n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою:

$$P_n = n!, \quad (1.2)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$, $0! = 1$.

Приклад 1.2.

Скількома способами 4 різні книги можна розставити на полиці?

Розв'язання: Кількість таких способів дорівнює числу перестановок з 4-х елементів, тобто за формулою (1.2):

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

2. Розміщенням з n елементів по k ($k \leq n$) вважається впорядкована k елементна підмножина n -елементної множини, елементи якої відрізняються між собою або порядком.

Число розміщень з n елементів по k позначають A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.3)$$

Приклад 1.3.

У футбольній лізі 15 команд. Скількома способами золота, срібна і бронзова медалі можуть бути розподілені між цими командами?

Розв'язання: Оскільки медалі різні (золота, срібна і бронзова), то шукане число кількості способів буде рівне розміщенню з 15 по 3.

Тоді за формулою (1.3) одержимо:

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$$

різних варіантів розподілу медалей між цими командами.

3. Комбінацією (сполученням) з n елементів по k ($k \leq n$) називають будь-яку k елементну підмножину n -елементної множини, в якій порядок елементів не враховується. Число різних таких комбінацій позначають C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (1.4)$$

причому $C_n^1 = n$, $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Приклад 1.4.

У ящику лежать 10 однакових деталей. Скількома способами можна вийняти навмання з цього ящика 2 деталі?

Розв'язання: Оскільки порядок вибору деталей не є важливим, то число способів вибору деталей буде рівне числу комбінацій з 10 елементів по 2.

Тоді за формулою (1.4) одержимо:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45 \text{ способів.}$$

Основні правила комбінаторики

Правило суми: Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B можна вибрати n способами, то один з об'єктів **або** A **або** B можна вибрати $(m + n)$ способами.

Правило добутку: Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами і після такого вибору інший об'єкт B вибрати (незалежно від вибору об'єкта A) n способами, то пари об'єктів A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Правила суми та добутку можна застосовувати для будь-якого скінченного числа множин.

Приклад 1.5.

У їдальні на обід пропонують на вибір 4 перших страви, 5 других і 3 третіх. Скількома способами можна собі обрати обід із трьох страв, щоб до нього входили перша, друга і третя страви?

Розв'язання: Одну першу страву з 4-х можна вибрати C_4^1 способами. Аналогічно, одну другу страву з 5-х існуючих можна обрати C_5^1 способами і одну третю страву з 3-х існуючих можна вибрати C_3^1 способами.

Тоді за правилом добутку обід із трьох страв, у якому були б перша, друга і третя страви можна обрати:

$$C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60 \text{ способами.}$$

Приклад 1.6.

У групі 10 хлопців і 5 дівчат, серед яких вибирають дві особи для участі у конференції. Яка ймовірність того, що виберуть:

- а) двох хлопців;
- б) хлопця і дівчину;
- в) двох хлопців або двох дівчат?

Розв'язання: У групі 15 осіб, серед яких 10 хлопців і 5 дівчат. Вибір двох осіб із 15 є сполученням, кількість яких:

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 13!} = 105.$$

Це є загальна кількість випадків ($n=105$).

а) Нехай подія A – вибрали двох хлопців.

Кількість випадків, що сприяють події A , визначається кількістю виборів 2-х хлопців з 10-ти:

$$m = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = 45.$$

Тоді за формулою (1.1) одержимо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{45}{105} = 0,43.$$

б) Нехай подія B – вибрали хлопця й дівчину.

Кількість випадків, що сприяють події B , визначається кількістю виборів 1 хлопця із 10-ти і 1 дівчини з 5-ти.

Це можливо зробити за правилом добутку:

$$m = C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ способами.}$$

Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{50}{105} = 0,48.$$

в) Нехай подія C – вибрали двох хлопців або двох дівчат.

Кількість випадків, що сприяють події C , визначається кількістю виборів 2-х хлопців з 10-ти або 2-х дівчат з 5-ти.

Це можливо зробити за правилом суми:

$$m = C_{10}^2 + C_5^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 45 + 10 = 55 \text{ способами.}$$

Отже,

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{55}{105} = 0,52.$$

1.5 Геометричне означення ймовірності

Класичне обчислення ймовірності застосовують коли числа m і n скінченні, а результати випробування рівноможливі. Якщо ж простір Ω елементарних подій є нескінченною множиною, то користуються геометричним означенням ймовірності. У цьому випадку проведення випробування розглядається як випадкове кидання точки в область Ω n -вимірного простору, а подія A – як потрапляння цієї точки в підобласть A області Ω . Множина всіх наслідків випробування виражається відповідною мірою m_Ω області Ω , а множина наслідків, сприятливих щодо події A , – мірою m_A області A .

Ймовірність події A за геометричним підходом обчислюють за формулою:

$$P(A) = \frac{m_A}{m_\Omega}, \quad (1.5)$$

де m_A – довжина, площа чи об'єм підмножини A ;

m_Ω – довжина, площа чи об'єм області Ω .

Якщо множина Ω вимірюється в лінійних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню довжин, якщо Ω вимірюється в квадратних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню площ, якщо Ω вимірюється в кубічних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню об'ємів просторових тіл, тобто:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_\Omega} \quad \text{або} \quad P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} \quad \text{або} \quad P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega}. \quad (1.6)$$

Таке означення ймовірності має просту геометричну інтерпретацію: це частина, яку складає довжина, площа чи об'єм множини A від довжини, площі чи об'єму усієї області Ω . Випадкові події в такому разі реалізуються як певні геометричні об'єкти.

Приклад 1.7.

Щосуботи два катери прибувають до одного причалу з 9-ї до 10-ї год. ранку. Визначити ймовірність того, що катери зустрінуться, якщо час стоянки біля причалу складає 20 хв.

Розв'язання. Розглянемо подію A , яка полягає в тому, що катери зустрінуться. Позначимо через x час прибуття до причалу першого катера, а через y – час прибуття другого катера. Оскільки вони можуть прийти протягом години (60 хв.), то $x \in [0; 60]$ і $y \in [0; 60]$. Отже, простором елементарних подій

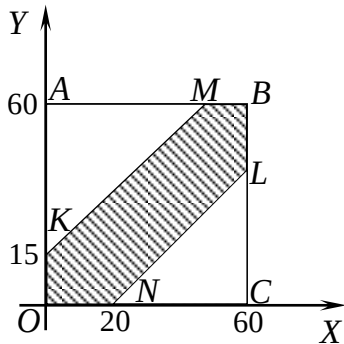


Рис. 1.1

Ω даного випадкового експерименту можна вважати точки квадрата $OABC$ (рис. 1.1).

Оскільки простір Ω є неперервним, то ймовірність $P(A)$ можна обчислити як відношення міри множини елементарних подій, сприятливих для події A , до міри множини всіх елементарних подій.

Визначимо відповідну множину точок площини, які сприяють події A .

Зустріч катерів відбудеться тоді і тільки тоді, коли $|y - x| \leq 20$ (різниця між моментами прибуття катерів не перевищує 20 хв.). Це означає, що зустрічі (подія A) відповідають точки квадрата, для яких $|y - x| \leq 20$ або $-20 \leq y - x \leq 20$, звідки $x - 20 \leq y \leq x + 20$, тобто множина точок сприятливих події A лежить між прямими $y = x - 20$ і $y = x + 20$, утворюючи багатокутник $OKMBLN$.

У нашому випадку площа квадрата $OABC$ становить $S_{\Omega} = 60^2$, а площа багатокутника $OKMBLN$ рівна $S_A = S_{\Omega} - 2S_{\triangle AMK} = 60^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 40^2 = 2000$.

Тоді шукана ймовірність за другою формулою (1.6) складає:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{2000}{60^2} = \frac{2000}{3600} \approx 0,556.$$

1.6 Статистичне означення ймовірності

Використання класичного означення до задач природничо-наукового або економічного характеру не завжди можливе з різних причин. Зокрема, часто неможливо подати результат експерименту як сукупність подій, які можна було б вважати рівноможливими.

З цієї причини поряд з класичним визначенням ймовірності користуються також **статистичним означенням ймовірності**, приймаючи за ймовірність події її відносну частоту.

Відносна частота, поряд з ймовірністю, належить до основних понять теорії ймовірностей. Якщо позначити через μ – число появ події в n – незалежних

випробуваннях, то відношення числа появ події до загального числа проведених випробувань називають **відносною частотою появи даної події**, тобто:

$$W(A) = \frac{\mu}{n}, \quad (1.7)$$

де μ – число появ події,

n – загальне число випробувань.

Порівнюючи класичне означення ймовірності події і відносної частоти, можна зробити такий висновок: **визначення ймовірностей не вимагає, щоб проводились випробування в дійсності; визначення відносної частоти вимагає фактичного проведення випробувань**. Тобто ймовірність визначають до випробування, а відносну частоту – після випробування.

Приклад 1.8.

Авіакомпанія впродовж доби виконує 25 рейсів, з яких 80 % – власним авіапарком. За деякий час було виконано 18 рейсів, з яких 16 – власним парком. Знайти ймовірність і відносну частоту виконання рейсів власним авіапарком.

Розв'язання.

Нехай подія A – рейси виконуються власним авіапарком.

Оскільки загальна добова кількість рейсів дорівнює $n=25$, а власним парком виконуються $m = 0,8 \cdot 25 = 20$ рейсів (наслідки, сприятливі події A), то ймовірність появи події A згідно формули (1.1) складає:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{25} = 0,8.$$

За умовою задачі за деякий час було виконано 18 рейсів, тобто фактично проведено 18 випробувань, в яких подія A відбулась 16 разів. Отже, відносна частота події A за формулою (1.7) складає:

$$W(A) = \frac{\mu}{n} = \frac{16}{18} = 0,89.$$

Тобто відносна частота $W(A)$ може відрізнитися від ймовірності $P(A)$. Проте їй притаманна властивість стійкості, яка полягає в тому, що зі збільшенням кількості випробувань вона наближається до значення ймовірності події і відрізняється від нього тим менше, чим більше проведено випробувань.

Статистичною ймовірністю події A називають число, навколо якого групуються відносні частоти цієї події:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(A).$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає теорія ймовірностей?
2. Яка мета теорії ймовірностей?
3. Навести коротку історію виникнення теорії ймовірностей.
4. Що називають множиною (або простором) елементарних подій?
5. Що таке випадкова подія? Наведіть приклад.
6. Які події називають достовірними, неможливими? Наведіть приклад.
7. Які події називають сумісними, несумісними? Наведіть приклад.
8. Які події називають залежними, незалежними?
9. Які події називають протилежними? Наведіть приклад.
10. Які події називають рівноможливими?
11. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
12. Яку нерівність задовольняє ймовірність випадкової події?
13. Чому дорівнюють ймовірності достовірної та неможливої подій?
14. Що таке комбінаторика?
15. Як обчислити кількість перестановок з n елементів?
16. Як обчислити кількість розміщень з n по k елементів?
17. Як обчислити кількість сполучень з n по k елементів?
18. Сформулюйте основні правила комбінаторики.
19. Сформулюйте геометричне означення ймовірності.
20. Що називають відносною частотою події?
21. Яку властивість відносної частоти спостерігають в практичній діяльності?
22. Що називають статистичною ймовірністю події?

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Елементи комбінаторики

1. Обчислити: а) $\frac{A_8^3 + A_6^2}{A_5^2}$; б) $\frac{P_5 - P_4}{4!}$; в) $C_7^5 + C_3^2$; г) $A_9^2 + 2C_{10}^0$.

2. Студенти першого курсу вивчають 9 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять для цих студентів на понеділок, якщо в цей день слід запланувати 3 лекції з різних предметів?

3. На секції математики студентської наукової конференції побажали виступити з доповідями шість студентів. Скількома способами їхні доповіді можна розмістити в програмі конференції, щоб вони стояли поруч?

4. Скількома способами можна нагородити п'ятьмома однаковими грошовими преміями 10-х кращих працівників підприємства?

5. Скількома способами можна розкласти 5 різних листів у 5 різних конвертів, якщо в кожен конверт вкладати лише 1 лист?

6. Скільки треба мати словників, щоб можна було робити переклади з будь-якої із шести іноземних мов на будь-яку іншу з них?

7. У класі 25 учнів, з яких 7 цікавляться математикою, 10 — економічними дисциплінами, 8 — інформатикою. Скількома способами можна навмання обрати серед них двох учнів, які цікавитимуться однією дисципліною?

8. Скількома способами можна розподілити пари з теорії ймовірностей у шести групах студентів між трьома викладачами, якщо кожен викладач має вести пари в двох групах?

9. Для молодіжної вечірки діджей підготував 15 компакт-дисків, 7 з яких з інструментальною музикою. Скількома способами можна навмання обрати 4 диски щоб на одному з них була інструментальна музика?

10. Скільки сигналів можна подати п'ятьма різними прапорцями, піднімаючи їх в будь-якій кількості і в довільному порядку?

11. Скількома способами можна взяти навмання одну квітку з кошика, в якому наявні 7 гвоздик, 8 троянд і 4 хризантеми?

12. У взводі залишилися 2 сержанти і 10 солдат. Скількома способами можна обрати для патрулювання з них одного сержанта і трьох солдат?

13. З 10-ти лотерейних білетів книжкової лотереї, що перебувають у продажу, 2 виграшні. Скількома способами можна купити 5 таких лотерейних білетів щоб серед них був хоча б один виграшний?

14. Скількома способами з колоди в 36 карт можна навмання вийняти 4 карти, щоб серед них були:

- а) три карти хрестової масті;
- б) дві карти бубнової та одна чирвової масті;
- в) всі карти різної масті.

15. У ящику лежать 20 деталей, серед яких 4 браковані. Скількома способами з цього ящика можна навмання вийняти:

- а) п'ять деталей;
- б) одну браковану і чотири стандартні;
- в) вісім деталей, серед яких 5 стандартних;
- г) шість деталей, серед яких хоча б дві браковані;
- д) дві однакові за якістю деталі?

Класичний спосіб обчислення ймовірності появи події

16. На одному з телеканалів у години пік на рекламу відводять 15 хв із кожної години телеефіру. Яка ймовірність того, що, увімкнувши цей канал у довільний момент часу в години пік, можна натрапити на рекламу?

17. Марина вирішила покататись на оглядовому колесі, яке має 40 кабінок: 20 синього кольору, 15 – червоного і 5 – жовтого. Колесо не зупиняється, щоб взяти на свій “борт” пасажирів, його швидкість дає змогу пасажирам входити і виходити лише на рівні землі. Марина сідає у першу вільну кабінку. Знайдіть ймовірність того, що вона кататиметься у червоній кабінці.

18. У групі з 20-ти студентів 30% – відмінники. Для здачі заліку навмання викликано одного студента. Яка ймовірність того, що ним виявиться відмінник?

19. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде кількість очок кратна трьом.

20. У під’їзді 80 квартир, по 5 на кожному поверсі. Для проведення опитування соціолог навмання обирає квартиру. Яка ймовірність того, що ця квартира розташована на першому, другому або третьому поверсі?

21. В ящику лежали 5 апельсинів і 4 яблука. Навмання з ящика вийняли 3 фрукти. Яка ймовірність того, що всі три вийняті фрукти є апельсинами?

22. У шухляді лежать ложки і виделки, причому виделок у 2 рази більше, ніж ложок. Яка ймовірність того, що взятим навмання предметом буде виделка?

23. Академічна група складається з 20 студентів, серед яких 3 дівчини. Для походу в театр навмання обирають 5-х студентів. Яка ймовірність того, що серед вибраних студентів будуть 3 хлопці?

24. На складі паливно мастильних матеріалів знаходяться 10 каністр з бензином та 5 з дизельним паливом. Яка ймовірність того, що в трьох навмання взятих каністрах виявиться паливо одного виду?

25. Із колоди в 36 карт навмання виймають 3 карти. Яка ймовірність того, що серед них точно буде один туз?

26. Деяка партія товару складається з 5-ти виробів першого сорту та 4-х виробів другого сорту. Знайти ймовірність того, що 2 навмання взяті вироби з цієї партії виявляться одного сорту.

27. В урні знаходяться 10 червоних, 6 синіх і 3 зелені кулі однакового розміру. З урни навмання вийняли 6 куль. Яка ймовірність того, що серед них виявляться 1 зелена, 2 сині та 3 червоні кулі?

28. У комплекті 9 виробів найвищої якості становлять 75% усього комплекту. Випадковим чином відібрано 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виробів виявляться лише 4 найвищої якості.

Геометричне та статистичне обчислення ймовірності

29. Хлопчик чекає телефонного дзвінка від друга протягом години. Знайти ймовірність того, що друг зателефонує йому в перші 10 хв.

30. На прямолінійній ділянці газопроводу завдовжки 80 км відбувся розрив. Яка ймовірність того, що розрив віддалений від обох кінців ділянки на відстань, більшу ніж 30 км?

31. На відрізку довжиною 12 см навмання поставлено 2 точки. Яка ймовірність того, що довжина кожного з утворених при цьому послідовних відрізків буде не меншою від 3см?

32. Два літаки прибувають у зону аеропорту в довільні моменти часу між 17-ою і 18-ою годинами. Посадка літака, що прибув другим, може бути здійснена не раніше ніж через 10 хв. після посадки першого. Знайти ймовірність того, що другому літаку не доведеться чекати посадки.

33. Дослідження показало, що з 1000 потенційних покупців, що зайшли в магазин, дійсно придбало товар 190. Яка відносна частота того, що зайшовши в магазин споживач:

- а) придбає товар;
- б) не придбає товар?

34. Стрілець, зробивши 100 пострілів по мішені, влучив у мішень 57 разів. Яка відносна частота того, що стрілець не вразив мішень?

35. Відносна частота появи бракованих виробів на автоматизованій виробничій лінії складає 0,02. Скільки перевірялося виробів, якщо відомо, що бракованих було 8?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Елементи комбінаторики

1. Обчислити n , якщо $A_n^5 = 20A_{n-1}^4$.

2. На п'ятьох співробітників хімічної лабораторії виділено три оздоровчі путівки. Скількома способами їх можна розподілити між працівниками, якщо всі путівки в різні оздоровчі центри?

3. У букеті 7 червоних і 8 жовтих троянд. З букета навмання виймають 4 троянди. Скількома способами це можна зробити, якщо відомо, що вийняті троянди одного кольору?

4. Скількома способами можна розставити на ігровому полі 6 баскетболістів?

5. На фірмі працюють 10 інженерів і 5 програмістів. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5-ти осіб. Скількома способами можна створити таку групу щоб до її складу входили 3 інженери та 2 програмісти?

5. Із 3-ох інженерів та 5-ти економістів повинна бути складена комісія у складі 3-х осіб. Скількома способами можна створити таку комісію, якщо в неї повинен обов'язково входити хоча б один інженер?

Класичний спосіб обчислення ймовірності появи події

6. Дмитро забув останню цифру PIN – коду своєї банківської картки. Знайдіть ймовірність того, що Дмитро з першої спроби отримає доступ до системи, якщо набиратиме останню цифру намання.

7. У пеналі лежали 15 синіх і 10 жовтих олівців. З пеналу намання взяли 5 олівців, які виявились жовтими. Яка ймовірність того, що наступний намання узятий олівець також буде жовтим?

8. У пакунку 6 білих і 4 чорних мотків пряжі. Із пакунка намання беруть 2 мотки. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

9. В букет складені 8 троянд, 6 гвоздик і 3 ромашки. З букету намання виймають квіти. З якою ймовірністю можна вийняти:

- а) одну ромашку;
- б) дві троянди;
- в) три квітки одного сорту;
- г) три квітки різних сортів;
- д) три троянди й дві ромашки;
- е) три квітки, серед яких принаймні одна гвоздика?

Геометричне та статистичне обчислення ймовірності

10. Два товариші мають зустрітися між 18-ою та 19-ою годинами, причому домовилися чекати один одного не більше 20 хвилин. Визначити ймовірність того, що вони зустрінуться.

11. Відділ технічного контролю виявив 5 бракованих виробів у партії, що складається з 1000 виробів. Знайти відносну частоту появи бракованого виробу, якісного виробу, а також суму цих частот.

12. При стрільбі з гвинтівки відносна частота попадання в ціль складає $W(A) = 0,65$. Знайти число влучань, якщо зроблено 140 пострілів.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

Варіант 1

- а) Прапор складається із 4-х горизонтальних смуг різного кольору. Скільки таких прапорів можна одержати, маючи у своєму розпорядженні смуги 7-ми кольорів?
- б) На конкурс для заміщення вакансій у компанію надіслали свої анкети 10 бухгалтерів та 8 менеджерів. Скількома способами можна прийняти на роботу трьох спеціалістів, якщо серед них повинен бути хоча б один бухгалтер?
- в) У шухляді письмового столу лежать 12 олівців однакової форми і розмірів, з яких 4 олівці – кольорові, а інші – прості. Яка ймовірність того, що, відкривши шухляду в темряві, навмання візьмуть простий олівець?
- г) В магазині виставлені на продаж 10 виробів, серед яких 4 вироби – неякісні. Знайти ймовірність того, що куплені навмання 2 вироби будуть неякісними.

Варіант 2

- а) Футбольна команда з 11 гравців обирає на матч капітана і віцекапітана. Скільки існує всього способів здійснити цей вибір?
- б) Будівельна організація виділила на допомогу підшефному дитячому будинку бригаду з 5-х робітників. В організації працюють всього 20 робітників, у тому числі 5 мулярів, 4 теслярі та 2 штукатури. Скількома способами можна укомплектувати бригаду, щоб вона складалася із робітників усіх спеціальностей по одному?
- в) Знайти ймовірність того, що кількість очок, яка випадає на гральному кубуку за одного підкидання, буде непарною.
- г) У корзині лежать 10 зелених і 5 червоних яблук. Яка ймовірність того, що навмання з корзини в темряві дістануть 3 зелені яблука?

Варіант 3

- а) Двосерійний фільм планується знімати у двох містах. Події першої серії будуть розгортатись в одному місті, а події другої серії – у другому. Мерії 7-ми міст дали згоду на зйомки нового фільму. Скільки існує різних варіантів для зйомки цього фільму?
- б) Із 3-ох інженерів та 5 економістів повинна бути складена комісія у складі 3-х осіб. Скількома способами можна створити таку комісію, якщо в неї повинен входити хоча б один інженер?
- в) 3 урни, в якій 12 білих та 8 чорних куль, виймають навмання кулю. Яка ймовірність того, що вона буде чорною?
- г) Із 20 лотерейних білетів є 2 виграшних. Знайти ймовірність того, що всі 5 навмання куплених лотерейних білетів будуть без виграшу.

Варіант 4

- а) В класі 10 навчальних предметів і 5 різних уроків на день. Скількома способами можна розподілити уроки учням цього класу на один день?
- б) Фірма "Молочна країна" пропонує 2 види молока різної жирності, 3 види кефіру та 5 видів йогурту. Фірма "Смачне молоко" пропонує 3 види молока, 2 види кефіру та 4 види йогурту. Фірма "Молоко від бабусі" пропонує 2 види молока, 1 вид кефіру та 3 види йогурту. Скількома способами домогосподарка випадково може купити молоко, кефір і йогурт виробництва однієї фірми?
- в) У партії з 20 деталей, 16 – стандартні. Знайти ймовірність того, що навмання вилучена з цієї партії деталь буде стандартною.
- г) У коробці лежали 4 червоних і 6 зелених олівців. Із коробки випало 3 олівці. Знайти ймовірність того, що всі вони зелені.

Варіант 5

- а) Сім спортсменів розігрують 1 золоту, 1 срібну та 1 бронзову медалі. Скількома способами можна розіграти ці нагороди?
- б) В ювелірну майстерню привезли 6 смарагдів, 7 алмазів та 5 сапфірів. Ювеліру замовили браслет, у якому 3 смарагди, 5 алмазів та 2 сапфіри. Скількома способами він може вибрати каміння на браслет?
- в) В банці лежать 10 червоних і 6 синіх гудзиків. Знайти ймовірність того, що з банки навмання вийняли синього гудзика.
- г) З партії виробів, яка містить 20 стандартних і 6 нестандартних виробів, навмання вибрали 3 вироби. Знайти ймовірність того, що всі вони – стандартні.

Варіант 6

- а) На святкуванні дня народження присутні 12 дітей. Клоун має намір вибрати 3-х дітей для участі в конкурсі і вручити кожному з них одну кульку. Скількома способами він може обрати дітей, якщо в руках у нього жовта, синя і зелена кульки?
- б) На виховну годину учні запросили ветерана війни. Після виступу вирішили подарувати букет із 5 квіток. Скількома способами можна вибрати квіти з вази, де 5 жовтих і 10 червоних гвоздик, щоб у букеті було не більше двох жовтих гвоздик?
- в) На уроці присутні 10 хлопців і 5 дівчат. Вчитель випадковим чином викликає до дошки одного учня. Яка ймовірність того, що ним виявиться хлопець?
- г) У ящику лежать 12 білих і 6 чорних куль. З ящика навмання виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі виявляться білими?

Варіант 7

- а) Скільки існує варіантів туристичного маршруту, якщо для екскурсії з 10-ти різних музеїв обирають 3 музеї?
- б) Оля в своїй кишені має 10 червоних та 5 синіх гудзиків. Скількома способами вона може навмання вийняти з кишені 3 гудзики, щоб серед них були принаймні 2 синіх гудзики?
- в) В регіоні працюють 10 підприємств, 3 з яких стали банкрутами. Знайти ймовірність того, що навмання вибране підприємство не є банкрутом.
- г) У партії з 20 виробів 4 вироби – пофарбовані. Навмання вибирають 3 вироби. Знайти ймовірність того, що всі вони непофарбовані.

Варіант 8

- а) Скількома способами можна дістати навмання 3 кулі з урни, в якій лежать 9 куль різного кольору?
- б) Із групи, яка складається з 7-ми чоловіків та 4-х жінок необхідно делегувати 6-х людей для роботи на виборчій дільниці. Скількома способами це можна зробити щоб серед них було не менше 2-х жінок?
- в) В ящику 7 однакових за розміром куль: 1 червона, 2 сині, 4 білих. Знайти ймовірність появи синьої кулі, якщо з ящика навмання взяли одну кулю.
- г) Комплект з 30-ти однотипних радіодеталей містить 20% нестандартних деталей. Для включення в схему навмання вибирається 4 деталі. Знайти ймовірність того, що будуть відібрані лише стандартні деталі.

Варіант 9

- а) Ще з осені садівник підготував 5 посадкових ям для весняної посадки в них саджанців фруктових дерев. Навесні він придбав 3 саджанці яблунь різних сортів. Скільки існує варіантів посадки цих саджанців у підготовлені ями?
- б) Із 10-ти троянд і 8-ми жоржин необхідно скласти святковий букет, щоб у ньому було не менше 8-ми троянд і 7-ми жоржин. Скількома способами це можна зробити?
- а) Наразі у фірми таксі 19 машин вільні: з них 7 білого кольору, 3 червоного, 5 сірого і 4 жовтого. На виклик відгукнувся один водій, який випадково опинився біля клієнта. Яка ймовірність того, що клієнта обслуговуватиме водій білого автомобіля?
- б) У магазині є 20 холодильників, причому 4 з них мають приховані дефекти. Навмання обрали 2 холодильники. Знайти ймовірність того, що серед відібраних нема холодильників з дефектами.

Варіант 10

- а) У кафе є 15 різних видів морозива. Скільки всього існує способів замовлення десерту з трьох різних видів морозива?
- б) Автопарк підприємства складається з 7-ми легкових автомобілів, 6-ти - вантажних та 4-х автобусів. Скількома способами для проходження ТО можна відібрати 5 легкових автомобілів, 3 – вантажних і 2 автобуси підприємства?
- в) У коробці лежать 42 олівці, з яких 14 – червоні, 16 – сині, а решта – зелені. Яка ймовірність того, що навмання взятий олівець не буде ні червоним, ні синім?
- г) Підприємство одержало 25 нових телевізорів, з яких 3 виявилися несправними. Для перевірки навмання взяли 2 телевізори. Яка ймовірність, що обидва вони справні?

Варіант 11

- а) Якою кількістю способів можна розсадити 8-х студентів у ряд з 8-ми місць?
- б) Екскурсійна група з 15 осіб підійшла до печери. У печеру заходять лише групами з 5 осіб. Скількома способами ця екскурсійна група може відвідати печеру?
- в) У вазі стоять 5 білих, 4 червоних і 6 жовтих троянд. Знайти ймовірність того, що навмання вибрані з вази у темряві троянда буде жовтою.
- г) У мішку лежать 20 мотків ниток, серед яких є 15 білих і 5 червоних. Визначити ймовірність того, що вибрані навмання з мішка 2 мотки ниток білого кольору.

Варіант 12

- а) Директор автосалону має 15 різних моделей автомобілів. Для демонстрації на виставці він може обрати лише 3 з них. Скількома способами це можна зробити?
- б) На одній полиці стоять 5 підручників з математики, 3 – з інформатики та 2 з фізики. Скількома способами з полиці навмання можна взяти 2 підручники з однієї і тієї самої навчальної дисципліни?
- в) У цеху по виготовленню м'ячів для гольфу в одній коробці лежали 77 м'ячів правильної форми та 23 м'ячі з дефектами. Знайти ймовірність того, що навмання вибрані з коробки м'яч буде бракованим.
- г) Скількома способами можна скласти команду з п'яти учасників шахового гуртка І-го курсу, шести учасників ІІ-го курсу і чотирьох учасників ІІІ-го курсу таким чином, щоб до її складу з І-го курсу входило три студенти, а з ІІ-го і ІІІ-го курсів – по два студенти?

Варіант 13

- а) Скількома способами можна розподілити 8 провідників у 8 вагонів електропоїзда, якщо з кожним вагоном закріплювати одного провідника?
- б) Шахматний клуб відвідують 5 хлопців та 3 дівчини. Для зустрічі з гросмейстером клуб отримав 3 запрошення. Скількома способами ці запрошення можна так розподілити, щоб на зустріч пішла хоча б одна дівчина?
- в) З 40-ка стандартних і 4-х нестандартних деталей для контролю взято навмання вісім, які виявилися стандартними. Знайти ймовірність того, що наступна взята навмання деталь буде стандартною.
- г) В партії з 19 пристроїв 15 є сертифікованими. Яка ймовірність того, що серед двох вибраних навмання пристроїв обидва виявляться сертифікованими?

Варіант 14

- а) Розклад одного дня навчання складається з 5 уроків. Визначити кількість можливих варіантів розкладу при виборі з 11 навчальних предметів.
- б) В урні лежать 6 білих і 4 чорних кулі. З урни беруть навмання 2 кулі. Скількома способами це можна зробити, щоб серед була принаймні одна чорного кольору?
- в) 3 групи студентів на практичному занятті присутні 17 хлопців та 13 дівчат. Викладачеві потрібно викликати когось для перевірки виконання домашніх завдань. Яка ймовірність того, що він викличе дівчину?
- г) У відділі контролю швейної фабрики представлені на огляд 80 костюмів, з яких 50 костюмів дизайнера *A* та 30 костюмів дизайнера *B*. Знайти ймовірність того, що взяті навмання для огляду два костюми виявляться плодом праці дизайнера *A*.

Варіант 15

- а) На столі лежать 12 олівців різних кольорів. Скількома способами з них у темряві можна навмання обрати 4 олівці?
- б) У вазі стоїть букет, складений з 8-ми троянд, 6-ти гвоздик і 3-х ромашок. Скількома способами з цього букету навмання можна дістати 2 квітки одного сорту?
- в) У відділі працюють 6 чоловіків і 9 жінок. Для анкетування навмання обрали одного зі співробітників цього відділу. Яка ймовірність того, що ним виявиться жінка?
- г) В аудиторії серед 12 комп'ютерів є 3 несправні. Знайти ймовірність того, що серед двох навмання вибраних комп'ютерів всі виявляться справними.

Варіант 16

- а) Скількома способами можуть зайняти перше, друге і третє місце 8 учасників фінального забігу на дистанцію 100м?
- б) У магазині продаються 3 червоні, 5 зелених і 4 сині шапки, а також 7 червоних, 2 зелених і 5 синіх шарфи. Скількома способами Маша може обрати собі шапку і шарф одного кольору?
- в) Пасічник зберігає мед в однакових закритих металевих бідонах. Їх у нього дванадцять: у трьох бідонах міститься квітковий мед, у чотирьох – липовий мед і у п'яти – гречаний. Знайти ймовірність того, що перший навання відкритий бідон буде містити квітковий мед.
- г) У гаманці лежать 7 монет номіналом 1 грн і 5 монет номіналом 2 грн. Визначити ймовірність того, що дві взяті навання з гаманця монети виявляться номіналом 1 грн.

Варіант 17

- а) На станції 7 запасних колій. Скількома способами можна розмістити на них 4 потяги?
- б) Скількома способами можна призначити варту з 12-ти солдат, 2-х сержантів та 1-го офіцера, якщо в підрозділі всього 14 солдат, 3 сержанти і 4 офіцери?
- в) На полиці стоять 18 однакових скляних банок з джемом. Серед них 6 банок з абрикосовим джемом та 12 – з яблучним. За кольором джеми не відрізняються один від одного. Господиня навання взяла одну банку. Яка ймовірність того, що вона буде з абрикосовим джемом?
- г) В холодильнику лежать 10 бананів, з яких 4 вже зіпсувались. Навання з холодильника виймають 3 банани. Знайти ймовірність того, що вони виявляться незіпсованими.

Варіант 18

- а) Скількома способами можна виготовити 3-х кольоровий прапор, якщо в наявності є тканини 7-ми різних кольорів?
- б) З трьох математиків та п'яти філологів необхідно скласти комісію в складі чотирьох людей, в яку б входив хоча б один математик. Скількома способами це можна зробити?
- в) На одній з полиць бібліотеки розміщено 16 книг, з яких 6 – історичні романи, а решта – детективи. Знайти ймовірність того, що перша книга, навання взята з полиці, буде детективом.
- г) У коробці лежать 3 олівці і 4 фломастери. Скількома способами навання з коробки можна дістати 2 предмети для малювання, якщо серед них має бути принаймні один олівець?

Варіант 19

- а) Скількома способами можна скласти візерунок із шістьох облицювальних плиток, якщо є чотири сорти плитки?
- б) У групі з 30-ти студентів на контрольній роботі з математики 6 студентів отримали оцінку “відмінно”, 10 студентів оцінку “добре” і 9 студентів оцінку “задовільно”. Яка ймовірність того, що всі 3 студенти групи, яких викликали до дошки, мають незадовільну оцінку за написання контрольної роботи?
- в) У лотереї 10 виграшних білетів і 290 білетів без виграшу. Яка ймовірність того, що перший придбаний білет цієї лотереї буде виграшним?
- б) На полиці стоять 5 підручників у твердій палітурці і 2 підручники – у м'якій. Навмання з полиці взяли 2 підручники. Знайти ймовірність того, що вони обидва матимуть тверду палітурку.

Варіант 20

- а) У поштовому відділенні продаються вітальні листівки 10 різних видів. Скількома способами можна придбати 2 різні вітальні листівки?
- б) В урні лежать 7 синіх та 5 червоних куль. Скількома способами навмання можна вийняти з цієї урни 2 кулі одного кольору?
- в) У туриста є 10 однакових за розмірами консервних банок, серед яких 4 банки – з тушкованим м'ясом та 6 банок – з рибою. Під час зливи етикетки відклеїлися. Турист навмання взяв одну банку. Яка ймовірність того, що вона буде з рибою?
- г) В партії зі 100 однакових зовні деталей змішані 40 деталей І-го сорту та 60 деталей ІІ-го сорту. Знайти ймовірність того, що 5 навмання взятих з партії деталей будуть ІІ-го сорту.

Розділ 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1 Теореми додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій

Сумою декількох подій називають подію, яка означає появу хоча б однієї з цих подій.

Теореми додавання ймовірностей по-різному формулюються для несумісних та сумісних подій.

Нагадаємо, що дві події називають **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої (не зможуть відбутися разом) в одному і тому ж випробуванні. В протилежному випадку події вважають **сумісними**.

Теорема 2.1. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.1)$$

З цієї теореми випливають декілька наслідків:

Наслідок 1. Якщо випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ - попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (2.2)$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій A і $\bar{A}$ дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (2.3)$$

Приклад 2.1.

На змаганнях зі стрільби стрілець влучає в десятку з ймовірністю 0,03, в дев'ятку – з ймовірністю 0,2, у вісімку – з ймовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілець набере більше восьми очок?

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – стрілець влучив у дев'ятку,

B – стрілець влучив у десятку .

Тоді $(A + B)$ – влучення в дев'ятку або десятку при одному пострілі.

Події A і B – несутимісні, тому згідно формули (2.1), маємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,2 + 0,03 = 0,23.$$

Приклад 2.2.

У ящику знаходяться 6 білих і 4 чорні кулі. З ящика виймають навмання 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони одноколіорові?

Розв’язання.

Нехай подія A – поява двох білих куль, а подія B – поява двох чорних куль. Події A та B несутимісні.

Число всіх єдиноможливих, рівноможливих і несутимісних випадків дорівнює числу пар, які можна утворити з десяти різних куль:

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = 45 - \text{число загальних випадків.}$$

Число випадків, сприятливих для появи двох білих куль (m), дорівнює:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4!} = 15,$$

а двох чорних:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2!} = 6.$$

Тоді за формулою (1.1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15},$$

а згідно формули (2.1):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}.$$

Теорема 2.2. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (2.4)$$

Теорема 2.2 може розповсюджуватися на будь-яку кількість сумісних подій.

2.2 Теорема множення ймовірностей для незалежних та залежних подій

Добутком декількох подій називають подію, яка означає спільну появу всіх цих подій.

Теорема множення ймовірностей по-різному формулюються для незалежних та залежних подій.

Нагадаємо, що дві події в одному випробуванні називають **незалежними**, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулась чи не відбулась інша подія. В іншому випадку, події – **залежні**.

Для характеристики залежних подій вводять поняття **умовної ймовірності**.

Ймовірність події A , обчислена за умови, що подія B відбулась називають **умовною ймовірністю** події A і позначають $P_B(A)$.

Аналогічно, умовна ймовірність появи події B , за умови, що відбулась подія A , позначається символом $P_A(B)$.

Теорема 2.3. *Ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.5)$$

Ймовірність спільної появи більшої кількості подій, незалежних сукупно, обчислюють за формулою:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (2.6)$$

Приклад 2.3.

У трьох коробках лежать по 10 деталей. У першій коробці – 8, в другій – 7 і в третій – 9 стандартних деталей. Із кожної коробки навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі три вийняті деталі будуть стандартними.

Розв’язання. Ймовірність того, що з першої коробки вийнята стандартна деталь (подія A), дорівнює за формулою (1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Ймовірність того, що з другої коробки вийнята стандартна деталь (подія B), дорівнює:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Ймовірність того, що з третьої коробки вийнята стандартна деталь (подія C), дорівнює:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Оскільки події A , B , C незалежні, то шукана ймовірність (за теоремою множення – формула (2.6) дорівнює:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Теорема 2.4. *Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія вже відбулась:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (2.7)$$

Якщо маємо три події A , B , C , залежні між собою, то теорема множення ймовірностей матиме вигляд:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C). \quad (2.8)$$

Приклад 2.4.

Студент вивчив 20 із 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що він по черзі відповів на всі три питання, які були в екзаменаційному білеті.

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – студент відповів на перше питання,

B – студент відповів на друге питання,

C – студент відповів на третє питання.

У нашому випадку маємо:

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0,8, \quad P_A(B) = \frac{19}{24} \approx 0,79,$$

$$P_{AB}(C) = \frac{18}{23} \approx 0,78$$

Події A , B і C у даному випадку – залежні між собою, тому згідно формули (2.8), маємо:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) \approx 0,8 \cdot 0,79 \cdot 0,78 \approx 0,49.$$

2.3 Теорема обчислення ймовірності появи хоча б однієї події

Наслідком теорем додавання та множення ймовірностей є *теорема для обчислення ймовірності появи в результаті випробування хоча б однієї із незалежних у сукупності подій*.

Теорема 2.5. *Ймовірність появи хоча б однієї із подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних сукупно, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій:*

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n), \quad (2.9)$$

де $P(\bar{A}_1), P(\bar{A}_2), \dots, P(\bar{A}_n)$ – ймовірності протилежних подій.

Приклад 2.5.

Підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність появи при цьому хоча б однієї шістки?

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – поява шістки на першому кубику,

B – поява шістки на другому кубику.

Тоді $(A + B)$ – поява хоча б однієї шістки при підкиданні кубиків.

Події A і B – сумісні, тому згідно з формулою (2.4):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

A і B – незалежні події, тому згідно з формулою (2.5):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Отже, остаточно маємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

Цю ж задачу можна також розв'язати іншим способом, а саме, скориставшись теоремою (2.9). Тобто:

$$P(C) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

При розв'язуванні деяких задач на обчислення ймовірностей доводиться поєднувати теореми додавання і множення.

Приклад 2.6.

Ймовірність того, що японський автовиробник (лідер світових продажів) має можливість реалізовувати свою продукцію через експорт до України, складає 0,7, до Польщі – 0,8, до США – 0,85. Знайти ймовірність того, що підприємство буде експортувати свою продукцію: а) лише до однієї країни; б) принаймні до двох країн.

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – можливість реалізації автомобілів японського виробника лише до однієї країни,

A_1 – експорт продукції до України,

A_2 – експорт продукції до Польщі,

A_3 – експорт продукції до США.

За умовою задачі $P(A_1) = 0,7$, тоді ймовірність протилежної події згідно з (2.3):

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Аналогічно, якщо $P(A_2) = 0,8$, тоді $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Оскільки $P(A_3) = 0,85$, то $P(\bar{A}_3) = 1 - 0,85 = 0,15$.

Так як події A_1, A_2, A_3 – несумісні та незалежні, тому:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + \\ &+ P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ &= 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,85 = 0,108. \end{aligned}$$

Подія B – можливість реалізації продукції принаймні до двох країн (будь-які дві або три).

Тоді

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3) = \\ &= 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,15 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,85 + 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,883. \end{aligned}$$

2.4 Формула повної ймовірності

Якщо подія A має складну структуру, то пряме визначення її ймовірності за класичним означенням може виявитись надто важким завданням. У такому випадку виникає питання про можливість розглянути подію A разом з іншими подіями, ймовірності яких відомі, і на основі розглянутих подій знайти ймовірність події A . Виявляється, що це можливо, і відповідь на поставлене питання дає формула повної ймовірності.

Нехай подія A може відбутись лише одночасно з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій H_i відбудеться подія A , то події H_i називають *гіпотезами*.

Якщо ймовірності гіпотез задані або їх можна обчислити з умов випробування, то ймовірність події A можна обчислити за **формулою повної ймовірності**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \quad (2.10)$$

де $P(H_i)$ – ймовірності гіпотез H_i ;

$P_{H_i}(A)$ – умовні ймовірності події A , обчислені за умови, що відповідна гіпотеза H_i відбулась.

При розв’язуванні задач на знаходження повної ймовірності варто дотримуватись такої послідовності:

- 1) визначити гіпотези і знайти їх ймовірності (якщо гіпотези рівноможливі, то їх ймовірності рівні, а якщо нерівноможливі, їх ймовірності різні, але в обох випадках сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці);
- 2) знайти умовні ймовірності;
- 3) скористатись формулою повної ймовірності.

Приклад 2.7.

На трьох автоматичних верстатах виготовляються однакові деталі. Відомо, що 30% продукції виробляється першим верстатом, 25% – другим і 45% – третім. Ймовірність виготовлення деталі, що відповідає стандарту, на першому верстаті дорівнює 0,99, на другому – 0,988 і на третьому – 0,98. Виготовлені протягом дня на трьох верстатах невідсортовані деталі знаходяться на складі. Визначити ймовірність того, що взята навмання деталь не відповідає стандарту.

Розв’язання.

Нехай подія A – вибрана навмання деталь не відповідає стандарту.

Гіпотези: H_1 – вибрана деталь виготовлена на першому верстаті;
 H_2 – вибрана деталь виготовлена на другому верстаті;
 H_3 – вибрана деталь виготовлена на третьому верстаті.

За умовою задачі: $P(H_1) = 0,3$, $P(H_2) = 0,25$, $P(H_3) = 0,45$.

Перевірка: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0,3 + 0,25 + 0,45 = 1$.

Умовні ймовірності події A відповідно дорівнюють:

$P_{H_1}(A) = 1 - 0,99 = 0,01$ – ймовірність того, що вибрана нестандартна деталь була виготовлена першим верстатом,

$P_{H_2}(A) = 1 - 0,988 = 0,012$ – ймовірність того, що вибрана нестандартна деталь була виготовлена другим верстатом,

$P_{H_3}(A) = 1 - 0,98 = 0,02$ – ймовірність того, що вибрана нестандартна деталь була виготовлена третім верстатом.

Використовуючи формулу повної ймовірності (2.10), знаходимо ймовірність того, що вибрана навмання деталь не відповідає стандарту:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = \\ &= 0,3 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,012 + 0,45 \cdot 0,02 = 0,015. \end{aligned}$$

2.5 Ймовірність гіпотез. Формула Байєса

Якщо випробування, в якому спостерігалася подія A , відбулося, і необхідно переоцінити правильність ймовірностей гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, то для цього застосовують **формулу Байєса** (за ім'ям англійського математика, який опублікував її у 1764 р.) або **формулу гіпотез**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

де $P(A)$ – повна ймовірність події A .

Ймовірності подій-гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, знайдені до початку даного випробування ($P(H_i), i = 1, 2, \dots, n$), називають **апріорними**. Ймовірності гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, знайдені після того як стали відомі результати випробування ($P_A(H_i), i = 1, 2, \dots, n$) називають **апостеріорними**.

Приклад 2.8.

Перший верстат виготовляє у два рази більше продукції, ніж другий, і в три рази більше, ніж третій. При цьому в роботі першого верстата у середньому помічають 3 браковані вироби зі 100, у другого – 2 з 50 виробів, у третього – 3 з 60 виробів. Взята навмання деталь виявилася бракованою. Яким верстатом її ймовірніше за все виготовлено?

Розв'язання.

Нехай подія A – взята деталь бракована.

Гіпотези: H_1 – деталь виготовлена на першому верстаті;

H_2 – деталь виготовлена на другому верстаті;

H_3 – деталь виготовлена на третьому верстаті.

Позначимо

$$P(H_1) = x, \text{ тоді } P(H_2) = \frac{x}{2}; \quad P(H_3) = \frac{x}{3}.$$

Події (гіпотези) H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу, тому:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1,$$

звідки знаходимо : $\frac{11x}{6} = 1, \quad x = \frac{6}{11}.$

Отже, $P(H_1) = \frac{6}{11}; \quad P(H_2) = \frac{3}{11}; \quad P(H_3) = \frac{2}{11}.$

Умовні ймовірності події A знайдемо за класичним означенням ймовірності (1.1):

$$P_{H_1}(A) = \frac{3}{100} = 0,03; \quad P_{H_2}(A) = \frac{2}{50} = 0,04; \quad P_{H_3}(A) = \frac{3}{60} = 0,05.$$

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{6}{11} \cdot 0,03 + \frac{3}{11} \cdot 0,04 + \frac{2}{11} \cdot 0,05 = \frac{1}{11} (0,18 + 0,12 + 0,1) = \frac{2}{55}.$$

Далі за формулами Байєса обчислимо ймовірності того, що браковану деталь виготовлено першим, другим, чи третім верстатом:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{11} \cdot 0,03}{\frac{2}{55}} = 0,45;$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{11} \cdot 0,04}{\frac{2}{55}} = 0,3;$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{11} \cdot 0,05}{\frac{2}{55}} = 0,25.$$

Оскільки $P_A(H_1) > P_A(H_2) > P_A(H_3)$, то, наймовірніше за все, узята бракована деталь виготовлена першим верстатом.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають сумою декількох подій?
2. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
3. Чому рівна сума ймовірностей протилежних подій?
4. Що називають добутком подій?
5. Сформулюйте теорему множення ймовірностей незалежних подій.
6. Що називають умовною ймовірністю події A за умови появи події B ?
7. Сформулюйте теорему множення ймовірностей залежних подій.
8. Запишіть формулу додавання сумісних і залежних подій.
9. Запишіть формулу додавання сумісних і незалежних подій.
10. Запишіть формулу для обчислення ймовірності появи в результаті випробування хоча б однієї із незалежних у сукупності подій.
11. Запишіть формулу повної ймовірності.
12. Вкажіть послідовність алгоритму розв'язування задач на знаходження повної ймовірності.
13. Запишіть формулу Байєса.
14. Які ймовірності подій-гіпотез називають апіорними?
15. Які ймовірності подій-гіпотез називають апостеріорними?

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Застосування теорем додавання та множення ймовірностей подій

1. На клумбі ростуть 20 червоних, 30 жовтих та 40 білих айстр. Яка ймовірність зірвати в темряві одну жовту або червону айстру?

2. Віра Іванівна розпочинає боротьбу з надмірною вагою. Першим кроком на шляху до стрункої фігури має стати щоденна заборона відкривати холодильник після шостої години вечора. Це їй вдається робити з ймовірністю 0,6. Яка ймовірність того, що протягом наступних трьох днів у зазначений час Віра Іванівна жодного разу не відкриє холодильник?

3. У кейсі лежать 20 дисків із записами музики в стилі диско і 10 дисків з музикою у стилі техно. Ді-джей навімання витягає з кейсу по черзі, один за одним, 2 музичні диски. Яка ймовірність того, що на двох вилучених з кейсу дисках записана музика в стилі диско?

4. Біля деканату стоять 15 студентів. Із них 9 відмінників, а решта – двієчники. Заступник декана викликає до себе по-одному студенту. Через деякий час у нього в кабінеті опинилося 3 студенти. Обчислити ймовірність того, що усі вони – двієчники.

5. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,8, а другим – 0,7. Стрільці, незалежно один від одного, зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що при цьому принаймні один стрілець влучив у мішень?

6. У кошику лежать 12 яблук – 8 яблук сорту Джонатан та 4 яблука сорту Голден. Петро навімання дістав з кошика одне яблуко, яке дав сестрі, після чого навімання дістав з кошика ще одне яблуко для себе. Яка ймовірність того, що сестрі дісталось яблуко сорту Джонатан, а Петру – яблуко сорту Голден?

7. В ящику 10 червоних і 6 синіх гудзиків. Навмання виймають два гудзики. Визначити ймовірність того, що гудзики будуть одного кольору.

8. У партії з 20 деталей є 16 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед навімання взятих трьох деталей виявиться принаймні одна стандартна.

9. Під час складання іспиту студентом ймовірність одержання п'ятірки дорівнює 0,3; четвірки – 0,45; трійки та двійки по 0,1; неявки на іспит – 0,05. Яка ймовірність того, що студент одержить позитивну оцінку?

10. В урні 10 білих, 15 чорних, 20 синіх і 25 червоних куль. Витягли одну кулю. Визначте ймовірність того, що витягнута куля: біла; чорна; синя; червона; біла або чорна; синя або червона; біла, чорна або синя.

11. В ящику 10 деталей, з яких чотири пофарбовані. Механік навімання взяв три деталі. Визначте ймовірність того, що хоча б одна з взятих деталей пофарбована.

12. В урні містяться п'ять чорних, шість білих і вісім червоних куль. Послідовно без повернення з урни виймають три кулі. Знайти ймовірність того, що перша куля – біла, а друга і третя – червоні.

Спільне використання теорем додавання і множення ймовірностей

13. Автостанція протягом доби виконує два рейси до Одеси. Ймовірність затримки першого рейсу дорівнює 0,1; другого – 0,15, причому затримка одного рейсу не залежить від іншого. Знайти ймовірність того, що:

- а) жоден рейс не затримано;
- б) затримали лише один рейс;
- в) затримали принаймні один рейс.

14. Три студенти здають екзамен з фізики. Ймовірність успішної здачі цього екзамену для першого студента становить 0,65, для другого студента – 0,8 і для третього – 0,85. Яка ймовірність того, що:

- а) екзамен успішно складуть лише 2 студенти;
- б) екзамен успішно складе хоча б один студент?

15. Заводом відправлені автомобілі для закупівлі сировини на чотири підприємства. Ймовірність наявності потрібної сировини на першому підприємстві дорівнює 0,6, на другому – 0,95, на третьому – 0,8, на четвертому – 0,75. Знайти ймовірність того, що:

- а) тільки на одному підприємстві не буде потрібної сировини; б) принаймні на одному підприємстві не буде сировини;
- б) на трьох підприємствах буде потрібна сировина.

16. На будівництво надійшла велика партія цементу, розфасованого в мішки по 50 кг. Нормальною вважається маса від 49,95 кг до 50,05 кг. Ймовірність того, що маса мішка менша 49,95 кг дорівнює 0,1; більша 50,05 кг – 0,05. Навмання взято два мішки з цієї партії. Знайти ймовірність того, що:

- а) вони обидва мають нормальну масу;
- б) маса обох мішків не відповідає нормі.

17. Три стрільці одночасно стріляють по одній і тій самій мішені. Ймовірність влучення у мішень для першого стрільця складає 0,4, для другого – 0,5, а для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що:

- а) в мішень влучить лише один стрілець;
- б) в мішень влучать три стрільці;
- в) не влучить жоден стрілець.

18. Для отримання кредиту підприємець звертається до двох банків. Ймовірність того, що перший банк не відмовить в наданні кредиту становить 0,75, другий – 0,8. Знайти ймовірність того, що:

- а) хоча б один банк дасть згоду на кредитування;
- б) обидва банки відмовляться надавати кредит;
- в) один дасть згоду на кредитування.

19. Укладено 4 однотипних договори страхування терміном на 1 рік. Ймовірність того, що за будь-яким договором протягом року надійде запит на відшкодування, дорівнює 0,1. Припускаючи, що надходження запитів незалежні між собою, знайти ймовірність того, що:

- а) запити не надійдуть за жодним договором;
- б) запит надійде принаймні за одним договором.

Практичне застосування формули повної ймовірності

20. Двигун автомобіля може працювати в трьох режимах: нормальному, форсованому, недовантаженому. Нормальний режим має місце у 60% випадків, форсований – у 10 %, а недовантажений – у 30% випадків. Надійність роботи двигуна (ймовірність безвідмовної роботи протягом заданого часу t) складає для нормального режиму $p_1 = 0,90$, для форсованого – $p_2 = 0,50$, для недовантаженого – $p_3 = 0,95$. Знайти повну надійність роботи двигуна.

21. Три екзаменатори приймають іспит з деякого предмету у групи студентів, яка складається з 30-ти чоловік, причому перший екзаменатор опитує 6-ох студентів, другий – 3-х студентів, а третій – 21-го студента (вибір студентів проводиться випадковим чином зі списку). Ставлення трьох екзаменаторів до слабо підготовлених студентів різне: шанси таких студентів скласти іспит у першого викладача рівні 40%, у другого – лише 10%, у третього – 70%. Знайти ймовірність того, що слабо підготовлений студент складе іспит.

22. 60% деяких виробів контролюються першим експертом, а 40% – другим. Ймовірності бракування дефектного виробу для першого та другого експерта відповідно складають 0,9 та 0,7. Ймовірності помилкового бракування виробу, що немає дефекту, дорівнюють відповідно для кожного експерта 0,02 та 0,11. Знайти ймовірності того, що:

- а) дефектний виріб забракують;
- б) забракують якісний виріб.

23. На столі стоять 3 ящики з кулями. У першому ящику лежать 4 білі і 5 чорних куль, у другому – 5 білих і 4 чорних, у третьому – 6 білих куль. Навмання вибрали один ящик і вийняли з нього одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла.

24. Стрільцю запропонували 5 гвинтівок, три з яких з оптичним прицілом. Імовірність влучення у мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність складає 0,7. Знайти ймовірність влучення стрільцем у мішень з гвинтівки, вибраної навмання.

25. Десять студентів розв'язують задачу. З них 2 студенти вчаться на «відмінно» (перша група), п'ять на «добре» (друга група) і три на «задовільно» (третья група). Ймовірність того, що задача буде розв'язана студентом з першої групи, дорівнює 0,9; другої групи – 0,8; третьої групи – 0,5. Яка ймовірність розв'язання задачі одним зі студентів?

26. Маємо дві коробки деталей. Ймовірність того, що в першій коробці деталь стандартна, дорівнює 0,8, а в другій – 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь із будь-якої коробки буде стандартна.

Застосування формули Байєса

27. Автомеханічний склад одержує від першого заводу в 4 рази більше агрегатів, ніж від другого. Брак у продукції першого заводу складає 4%, а у продукції другого – 8%. Випадковим способом вибраний агрегат виявився бракованим. Яким заводом він ймовірноше за все виготовлений?

28. На заводі по виготовленню соняшникової олії встановлено вітчизняний та імпортований автомати розливу, продуктивності яких відносяться, як 4:6. Пляшки з олією надходять на загальний конвеєр. При цьому вітчизняний автомат дає в середньому 5% браку, а імпортований – 2%. Навмання взята з конвеєра пляшка олії виявилась ушкодженою. Яка ймовірність того, що олія в неї розлита імпортованим автоматом?

29. Дві секретарки заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність того, що помилки в документі зробить перша секретарка становить 0,05, а друга – 0,1. Перша секретарка заповнила 20 документів, а друга – 30. Навмання взятий документ виявився бракованим. Визначити ймовірності того, що його заповнювала перша секретарка.

30. У трьох однакових контейнерах містяться стартери. У першому контейнері 2% некондиційних стартерів, у другому – 3%, в третьому – 1%. Із навмання вибраного контейнера взято один стартер, який виявився некондиційним. Яка ймовірність того, що цей стартер взято з третього контейнера?

31. Вісімдесят відсотків всіх приладів складаються з високоякісних деталей, а двадцять відсотків – з деталей звичайної якості. Якщо прилад зібрано з високоякісних деталей, то ймовірність його безвідмовної роботи протягом певного часу t дорівнює 0,9. Якщо прилад зібрано з деталей звичайної якості, то ймовірність – 0,5. При випробуванні протягом часу t прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що його зібрано з високоякісних деталей.

32. Два стрільці, незалежно один від одного, роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого складає 0,35, а другого – 0,7. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив другий стрілець.

33. До лікарні потрапляють у середньому 50% хворих, що мають захворювання А, 30% – захворювання В, 20% – захворювання С. Ймовірність повного виліковування для хвороби А складає 0,7; для хвороби В – 0,8; для хвороби С – 0,9. Знайти ймовірність того, що хворий, який потрапив до лікарні і виписався через деякий час здоровим, мав захворювання А.

34. Автомобільне мастило розливають на двох технологічних лініях заводу. При цьому ймовірність виходу бракованої продукції з першої лінії складає 0,88, а з другої – 0,95. Навмання взята каністра мастила виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона розлита на другій лінії?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Застосування теорем додавання та множення ймовірностей подій

1. В одному ящику лежать 3 білих і 5 чорних куль, а в іншому ящику - 6 білих і 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б з одного ящика буде вийнято білу кулю, якщо з кожного ящика вийнято по одній кулі.

2. Яка ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде парна кількість очок або число кратне трьом?

3. На співбесіду прийшло 10 чоловік. Троє із них некваліфіковані робітники. Представник фірми запросив у кабінет по черзі двох робітників. Знайти ймовірність того, що вони обидва кваліфіковані.

Спільне використання теорем додавання і множення ймовірностей

4. Троє гравців грають у дартс. Ймовірність влучення в «яблучко» для першого гравця складає 0,6, для другого гравця – 0,8, а для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що в «яблучко» влучать:

- а) принаймні один гравець;
- б) три гравці;
- в) лише один гравець;
- г) двоє гравців.

Практичне застосування формули повної ймовірності

5. На склад надходить однакова кількість електричних ламп з кожного з двох заводів. Відомо, що перший завод випускає 95%, а другий – 92% стандартної продукції. Знайти ймовірність того, що узята навмання на складі електролампа виявилась стандартною.

6. Підприємство має трьох постачальників комплектуючих – фірми *A*, *B* та *C*. На частку фірми *A* припадає 50% загального обсягу поставок, на частку фірми *B* – 30% і на частку фірми *C* – 20%. З практики відомо, що серед поставлених фірмою *A* деталей 10% браковані, фірмою *B* – 5% і фірмою *C* – 6%. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться придатною?

Застосування формули Байєса

7. У першій коробці лежать 10 патронів, 4 з яких – холості. У другій коробці лежать 15 патронів, з яких 3 холості. Знайти ймовірність того, що навмання взятий холостий патрон був вилучений з першої коробки.

8. Якість продукції перевіряється одним із двох контролерів, продуктивності праці яких відносяться, як 3:2. Ймовірність того, що продукція буде визнана якісною першим контролером складає 0,95, а другим – 0,9. Продукція під час перевірки була визнана якісною. Знайти ймовірність того, що її перевірів: а) перший контролер; б) другий контролер.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

Варіант 1

а) У фізкультурній групі 11 спортсменів, серед яких 6 першорозрядників. Знайти ймовірність того, що серед 5 – ти випадково відібраних спортсменів 3 виявляться першорозрядниками ?

б) На автоматичній лінії, що складається з 3-х послідовно працюючих верстатів, проходить обробку деталей. Імовірності появи браку для кожного верстата відповідно складають 0,05, 0,06 та 0,07. Знайти ймовірність вироблення браку:

- 1) одним верстатом;
- 2) хоча б одним верстатом.

в) У складальника є 3 конусних і 7 еліптичних валиків. Складальник навмання взяв спочатку один валик, а потім другий. Знайти ймовірність того, що перший з узятих валиків - конусний, а другий - еліптичний.

г) До центру статистичних досліджень надходять данні з трьох пунктів: з першого – 50%, з другого – 30%, з третього – 20% всіх даних. Ймовірність припущення помилки під час обробки статистичних даних у першому пункті дорівнює 0,1, у другому – 0,05, у третьому – 0,15. Яка ймовірність того, що отримані центром дані достовірні?

д) Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність помилки для першого економіста дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Під час перевірки у навмання взятому з папки документі виявили помилку. Знайти ймовірність того, що цей документ складав перший економіст.

Варіант 2

а) Серед 5-ти хлопців та 7-ми дівчат випадковим чином розігруються 4 квитки в театр. Визначити ймовірність того, що серед 4-х “щасливчиків” виявляться 2 дівчини.

б) Перевірка партії фасованих макарон по 0,5 кг дала такі результати: 30% усіх пачок мали масу по 498г, 60% - по 500г, 10% - по 502г. З партії навмання взяли дві пачки. Яка ймовірність того, що:

- 1) обидві взяті пачки мають однакову масу;
- 2) загальна маса двох взятих пачок відхиляється від норми?

в) Господиня після великого прання розвісила на мотузці у дворі 5 дитячих кофтинок і 10 маєчок. Вітром з мотузки почерзі одну за одною зірвало 2 речі. Яка ймовірність того, що спочатку з мотузки впала маєчка, а потім кофтинка?

г) Виробництво певної продукції може проводитись у трьох температурних режимах з ймовірностями 0,45; 0,25; 0,3 відповідно. Залежно від температурного режиму ймовірність отримання продукції вищої якості становить відповідно 0,8; 0,85; 0,9. Яка ймовірність того, що виготовлена продукція вищої якості?

д) До каси підприємства надійшли банкноти у пачках від двох банків: 50 пачок від першого і 70 – від другого. Ймовірність помилки касирів першого банку становить 0,15, другого – 0,2. Яка ймовірність того, що пачку без помилок було сформовано касирами другого банку?

Варіант 3

а) На складі є 15 приладів, причому 10 з них – вітчизняного виробництва, а решта – імпортні. Знайти ймовірність того, що серед 5-ти навмання взятих приладів 3 виявляться вітчизняного виробництва.

б) Для пожежної сигналізації встановлено 3 незалежно працюючих один від одного датчики. Ймовірності того, що при пожежі спрацюють відповідно кожен з датчиків, відповідно дорівнюють 0,9, 0,95 та 0,97. Знайти ймовірність того, що при пожежі спрацюють:

1) два датчики;

2) хоча б один датчик.

в) Студент, який прийшов на екзамен, добре вивчив 90 із 100 питань програми. Знайти ймовірність того, що цей студент знає відповіді на всі 3 питання, задані йому екзаменатором, по черзі один за одним.

г) У рекламному агентстві працюють три групи дизайнерів: перша група обслуговує 25 підприємств, друга – 45, третя – 30. Протягом одного місяця кошти, витрачені на рекламу дизайнерами першої групи, повертаються до 40% підприємств, другої – до 45%, третьої – до 35%. Яка ймовірність того, що навмання вибране підприємство окупило витрачені на рекламу кошти протягом місяця?

д) Магазин отримує продукцію від двох виробників: перший постачає $\frac{2}{5}$ усіх виробів, другий – $\frac{3}{5}$. Ймовірність продажу виробів першого виробника становить 0,9, другого – 0,8. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб буде реалізовано від першого виробника?

Варіант 4

а) Серед 10-ти лотерейних білетів є 3 виграшних. Визначити ймовірність того, що з узятих навмання 5-ти білетів 2 виявляться виграшними.

б) Механізм складається з трьох вузлів. Ймовірність браку при виготовленні першого вузла складає 0,008, другого – 0,012, третього – 0,01. Знайти ймовірність появи браку при виготовленні:

1) одного вузла;

2) хоча б одного вузла.

в) В урні лежать 18 білих і 2 чорні кулі. Навмання одна за одною виймають дві кулі без повернення в урну. Знайти ймовірність того, що обидві вийняті кулі будуть чорного кольору.

г) Виробник комп'ютерів отримує комплектуючі деталі від трьох постачальників, частки яких становлять відповідно 20%, 45% та 35%. Деталі першого постачальника мають 2% браку, другого 1%, третього – 3%. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде з браком?

д) Лікар оглядає хворого і підозрює у нього два захворювання: пневмонію і бронхіт, причому ймовірність наявності пневмонії лікар оцінює в 40%, а бронхіту – в 60%. Хворому проводять додаткове дослідження, яке дає позитивну реакцію при пневмонії у 90% випадків і при бронхіті – у 20%. Дослідження дало позитивну реакцію на одне з захворювань. Яка ймовірність того, що хворий має пневмонію?

Варіант 5

а) На вітрині магазину представлені 20 коробок цукерок, причому у трьох з них цукерки з горіхами. З вітрини навмання виймають 4 коробки цукерок. Яка ймовірність того, що в одній з вийнятих коробок виявляться цукерки з горіхами?

б) Стрілець виконує 3 постріли по рухомій мішені. Ймовірність влучення в ціль при першому пострілі дорівнює 0,1, при другому – 0,3, при третьому – 0,5. Визначити ймовірність:

- 1) одного влучення;
- 2) хоча б одного.

в) На тарілці лежать 3 зелених і 4 червоних яблука. З тарілки навмання одне за одним беруть 2 яблука. Знайти ймовірність, що перше взяте яблуко – зелене, а друге – червоне.

г) На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 80%, а друга і третя по 10% усіх виробів. Частка браку гвинтів складає відповідно 2%, 3% та 1%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний гвинт бракований?

д) Дві перфаторщиці набили на одному перфаторі відповідно 10 і 20 перфокарт. Ймовірність того, що перша перфаторщиця допустила помилку в перфокарті, складає 0,05; для другої перфаторщиці ця ймовірність дорівнює 0,1. При перевірці перфокарт була виявлена помилка. Знайти ймовірність того, що помилилася друга перфаторщиця.

Варіант 6

а) Із 15 рейсів, що виконуються з аеропорту протягом доби, 60 % рейсів виконуються власним парком літаків. Знайти ймовірність того, що з вибраних навмання 5-ти рейсів рівно 3 виконуються власним парком літаків.

б) Фірма має можливість отримати два контракти. Ймовірність отримання першого контракту складає 0,9, а другого – 0,8. Вважаючи ці події незалежними, знайти ймовірності наступних подій:

- 1) фірма отримає обидва контракти;
- 2) фірма отримає принаймні один контракт.

в) На складі серед 50 електроламп є 3 нестандартні. Зі складу навмання одну за одною беруть 2 електролампи. Знайти ймовірність того, що обидві з них виявляться нестандартними.

г) На фабриці виготовляють підосви до взуття. Перша фабрика виготовляє 30%, друга 56%, третя 14% усієї продукції. Відсоток браку для кожної з фабрик відповідно рівний 2%, 4% та 3%. Яка ймовірність того, що випадково вибрана підосва бракована?

л) Деталі, які виготовляє завод, можуть бути перевірені щодо відповідності стандартам, одним із двох контролерів. Імовірність того, що деталь буде перевірена першим контролером, становить 0,6, другим контролером – 0,4. Імовірність того, що деталь буде визнана стандартною першим контролером – 0,94, другим контролером – 0,98. Після перевірки деталь визнана стандартною. Знайти ймовірність того, її перевірів перший контролер.

Варіант 7

а) 3 10 літаків, що прибувають в аеропорт протягом доби, 80 % мають повне комерційне завантаження. Знайти ймовірність того, що серед п'яти випадковим способом відібраних літаків тільки 4 мають повне завантаження.

б) Три станки – автомати обслуговує один робітник. Ймовірність того, що в деякий момент часу вимагає уваги робітника перший станок, дорівнює 0,3, другий – 0,2, третій – 0,1. Визначити ймовірність того, що в деякий момент часу вимагатиме уваги робітника:

- 1) один станок;
- 2) хоча б один станок.

в) Із колоди карт (36 штук) навмання витягають одну за одною дві карти. Знайти ймовірність того, що буде витягнута спочатку шістка, а потім дама.

г) У крамницю для продажу надійшла продукція з трьох фабрик, відносні частки яких складають відповідно 50%; 30%; 20%. Брак продукції цих фабрик становить 2%; 3% та 5% відповідно. Знайти ймовірність того, що навмання куплений у магазині виріб цих фабрик буде якісним.

д) Два автомати виробляють однакові деталі, які поступають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша продуктивності другого. Перший автомат виробляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь вироблена першим автоматом.

Варіант 8

а) В авіакасі було 15 квитків, серед яких 6 квитків до пункту А. До кінця зміни продали 8 квитків. Знайти ймовірність того, що 3 з них до пункту А.

б) Ймовірність влучення в ціль першої гармати – 0,7, другої – 0,9, третьої – 0,75. Знайти ймовірність того, що при одному залпі з трьох гармат у мішень влучать:

- 1) дві гармати;
- 2) хоча б одна гармата.

в) На полиці стоять 10 книжок, серед яких 3 у м'якій обкладинці. З полиці навмання одну за одною беруть 2 книжки. Знайти ймовірність того, що обидві з них виявляться у м'якій обкладинці.

г) На будівництво поступають будівельні блоки одної марки з трьох різних заводів. Перший завод постачає 45% всіх матеріалів, другий – 30%, а третій – 25%. Ймовірності браку в продукції заводів відповідно складають 0,05, 0,06 та 0,07. Яка ймовірність того, що навмання взятий блок буде бракованим?

д) В першому ящику лежать 8 білих і 6 чорних куль, а в другому – 10 білих і 4 чорних. Навмання вибирають ящик і кулю. Відомо, що вийнята куля чорна. Знайти ймовірність того, що її вилучено з першого ящика.

Варіант 9

а) У ящику лежать 12 деталей, серед яких 9 стандартних, а інші – браковані. Навмання з ящика вийняли 4 деталі. Знайти ймовірність того, що 3 з них – стандартні.

б) Ймовірність того, що перший футболіст влучить у ворота дорівнює 0,7, а другий – 0,8. Знайти ймовірність того, що коли кожен з футболістів зробить по одному удару, то:

1) один влучить;

2) хоча б один влучить.

в) В урні 5 білих і 7 чорних кульок. З неї навмання одну за одною виймають дві кулі без повернення. Яка ймовірність того, що обидві вийняті кулі білі?

г) В магазині є три холодильники з залишками морозива. У першому залишились 4 пачки білого і 6 пачок шоколадного морозива, у другому – 2 пачки білого морозива і 8 шоколадного, у третьому – 3 пачки білого морозива і 7 шоколадного. Навмання обрали холодильник і вийняли з нього пачку морозива. Визначити ймовірність того, що це пачка білого морозива.

д) Електронний прилад містить дві мікросхеми. Ймовірність виходу з ладу протягом одного року для першої мікросхеми дорівнює 0,2, а для другої – 0,1. Відомо, що протягом року з ладу вийшла одна мікросхема. Яка ймовірність того, що це перша мікросхема?

Варіант 10

а) 3 десяти працівників, серед яких 7 вищого розряду, сформовано бригаду. Знайти ймовірність того, що серед 6-ти навмання обраних працівників цієї бригади, 4 працівники будуть вищого розряду.

б) Робітник обслуговує два ткацьких верстати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години верстат не потребуватиме втручання робітника, для першого дорівнює 0,9, для другого – 0,7. Знайти ймовірність того, що протягом першої ж робочої години:

а) тільки один станок потребуватиме втручання робітника;

б) хоча б один станок потребуватиме втручання робітника.

в) На складі знаходяться 20 мішків борошна, серед яких 12 мішків борошна вищого гатунку, а решта – мішки борошна першого сорту. Зі складу навмання один за одним беруть 2 мішки борошна. Знайти ймовірність того, що перший мішок міститиме борошно вищого сорту, а другий – борошно першого сорту.

г) Є дві корзини з трояндами. У першій корзині 20 троянд, серед яких 4 білих і 16 червоних, а в другій – 10 троянд, серед яких 3 білих і 7 жовтих. З цих двох корзин навмання вибрано одну, а потім з цієї корзини навмання вибрано троянду. Знайти ймовірність того, що вибрана троянда буде білою.

д) На трьох заводах виготовляють діодні лампочки до фар автомобілів. Перший завод виготовляє 70%, другий 12%, третій 18% всієї продукції. Частка браку відповідно складає 4%, 1%, 2%. Випадково вибрана лампочка бракована. Яка ймовірність того, що її виготовлено третім заводом?

Варіант 11

а) У групі 8 студентів чоловічої статі та 4 – жіночої. Декан викликав до себе 3-х студентів цієї групи. Знайти ймовірність того, що серед них буде одна студентка і 2 студенти.

б) Три вантажних автомобілі, що доставляють вантажі до трьох споживачів, потрапили на вантажно-розвантажувальні пункти (ВРП). Ймовірність того, що автомобілям буде необхідно очікувати розвантаження у черзі, складає 0,7; 0,8 і 0,9 для першого, другого і третього ВРП, відповідно. Знайти ймовірності наступних подій:

1) тільки один з трьох автомобілів буде очікувати розвантаження у черзі.

2) жоден з трьох автомобілів не буде очікувати розвантаження у черзі.

в) Комплект із 20 виробів містить 40 % нестандартних виробів. З комплекту навмання один за одним беруть 2 вироби. Знайти ймовірність того, що перший з них нестандартний, а другий – стандартний.

г) Маємо дві коробки деталей. Ймовірність того, що в першій коробці деталь стандартна, складає 0,8, а в другій – 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь із будь-якої коробки буде стандартною.

д) Зібрана геодезична інформація з певної території. Перший геодезист дає 30% усіх відомостей, другий – 45%, третій – те, що залишилося. Помилкові результати першого геодезиста складають 1%, другого – 3%, третього – 5%. Перевірено якість вимірів одного об'єкту – виміри виявилися помилковими. Визначити ймовірність того, що ці виміри робив третій геодезист.

Варіант 12

а) В цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання відбирають 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед них будуть 3 жінки.

б) У цеху є три резервні генератори, що працюють незалежно один від одного. Для кожного з них ймовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено:

1) два генератори з трьох;

2) принаймні один генератор.

в) У відділі технічного контролю швейної фабрики представлені на огляд 80 костюмів, з яких 50 костюмів одного фасону, а 30 - іншого. Навмання один за одним для огляду беруть 2 костюми. Знайти ймовірність того, що перший костюм буде одного сорту, а другий – другого.

г) На склад надходять однакові електричні лампи. Перший завод постачає 70%, а другий – 30% усієї кількості ламп. Відомо, що перший завод випускає 95% продукції, яка може відпрацювати встановлений термін, а другий – 92%. Знайти ймовірність того, що взята навмання електролампа відпрацювала встановлений термін.

д) Мандрівник може купити квиток в одній з трьох кас залізничного вокзалу. Ймовірність того, що він попрямує до першої каси складає $\frac{1}{2}$, до другої – $\frac{1}{3}$, до третьої – $\frac{1}{6}$. Ймовірності того, що в касах уже немає квитків, рівні відповідно $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{8}$. Мандрівник звернувся в одну з кас і таки купив квиток. Знайти ймовірність того, що квиток був куплений в першій касі.

Варіант 13

а) У коробці лежать 4 червоних і 6 зелених олівців. Із коробки випали 3 олівці. Знайти ймовірність того, що 2 із них червоні.

б) Радіостанція аеропорту надсилає 3 повідомлення борту літака. Імовірність підслуховування розвідувальним агентством першого повідомлення дорівнює 0,6; другого – 0,65; третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що розвідувальне агентство підслухало:

1) два повідомлення;

2) принаймні одне повідомлення.

в) На тарілці лежать 2 апельсини та 7 мандаринів. З тарілки навмання один за одним беруть 2 фрукти. Знайти ймовірність того, що першим візьмуть мандарин, а другим – апельсин.

г) З першого автомата надходить на конвеєр 80%, а із другого 20% таких самих деталей. На першому автоматі брак деталей становить 1%, а на другому 4%. Визначити ймовірність того, що взята навмання з конвеєра деталь є бракованою.

д) Для участі у спортивних змаганнях з першої групи було вибрано 4 студенти, з другої – 6 студентів і з третьої - 5 студентів. Імовірності того, що студент потрапляє у збірну інституту складають 0,5; 0,4 і 0,3 відповідно для кожної з груп. Навмання обраний учасник спортивних змагань потрапив до збірної. Яка ймовірність того, що це був студент з другої групи?

Варіант 14

а) У класі 25 учнів, з яких 10 цікавляться математикою, а інші – літературою. Знайти ймовірність того, що 2 навмання вибраних учні класу цікавитимуться однією дисципліною.

б) Ймовірність того, що біатлоніст схибить на першому рубежі дорівнює 0,15; схибить на другому – 0,1; схибить на третьому – 0,3. Знайти ймовірність того, що біатлоніст схибить:

- 1) на усіх трьох рубежах;
- 2) принаймні на одному рубежі.

в) В ящику лежать 5 морквин та 7 картоплин. З ящика навмання один за одним беруть 2 овочі. Знайти ймовірність того, що візьмуть підряд 2 картоплини.

г) Деталі виготовляють на трьох верстатах і направляють на спільний конвеєр. На першому верстаті виготовлено 40% всіх деталей, на другому – 35%, і на третьому – 25%. На першому верстаті 90% деталей були I-го сорту, на другому – 80%, на третьому – 70%. Яка ймовірність, що взята навмання з конвеєра деталь I-го сорту?

д) На полігоні є 10 гвинтівок, з яких 4 мають оптичний приціл. Ймовірність того, що стрілок влучить у мішень із гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; із гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок влучив у мішень із навмання взятої гвинтівки. Знайти ймовірність того, що він стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом.

Варіант 15

а) В ящику лежать 6 білих і 4 чорних кулі. З ящика виймають навмання 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони одного кольору.

б) Для трьох роздрібних торговельних підприємств визначено плановий рівень прибутку. Ймовірність того, що перше підприємство виконає план прибутку складає 90%, для другого вона становить 95%, для третього 100%. Знайти ймовірність того, що плановий рівень прибутку буде досягнутий:

- 1) усіма підприємствами;
- 2) принаймні одним підприємством.

в) Біля відділення пошти для отримання пенсії стоять у черзі 15 людей: 9 жінок і 6 чоловіків. Працівник пошти дозволяє заходити у відділення один за одним згідно черги по одній людині. Через деякий час у відділенні пошти опинилися 3 людини. Знайти ймовірність того, що першою і другою увійшли до відділення пошти жінки, а третім – чоловік.

г) Виробниче об'єднання складається із трьох підприємств. Продукція виготовляється на цих підприємствах і надходить на спільний склад виробничого об'єднання. За якийсь період перше підприємство здало на склад 300 одиниць продукції, серед яких 2 браковані, друге – 200 одиниць продукції, серед яких 2% браковані і третє – 500 одиниць, серед яких 4 браковані. Визначити ймовірність того, що навмання взята зі складу одиниця продукції буде бракованою.

д) Комп'ютери однієї марки виробляють 2 підприємства, причому перше підприємство випускає в три рази більше комп'ютерів, ніж друге. На першому підприємстві серед вироблених комп'ютерів зафіксовано 1% браку, а на другому – 2%. Навмання куплений комп'ютер виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він вироблений першим підприємством?

Варіант 16

а) Поліція зупинила групу іноземних туристів, до якої входили 5 іспанців та 4 французь. У трьох із них, навімання обраних, перевірили документи. Знайти ймовірність того, що поліція перевірила документи у 2-х іспанців та одного французь цієї іноземної групи туристів.

б) Для кожної з трьох виробничих ділянок ймовірності невиконання плану відповідно рівні: 0,3; 0,1 та 0,2. Знайти ймовірність того, що до моменту підбиття підсумків роботи планове завдання буде виконано:

- 1) двома ділянками;
- 2) принаймні однією ділянкою.

в) У ящику 7 білих і 5 чорних куль, які відрізняються лише кольором. Випадковим чином виймають 1 кулю і не опускаючи її назад, виймають ще одну. Знайти ймовірність того, якщо при першому вилученні дістали білу кулю, а другою вийнято чорну кулю.

г) Вісімдесят відсотків усіх приладів складається з високоякісних деталей, а двадцять відсотків – з деталей звичайної якості. Якщо прилад зібрано з високоякісних деталей, то ймовірність його безвідмовної роботи протягом певного часу t дорівнює 0,9. Якщо ж прилад зібрано з деталей звичайної якості, то ймовірність його безвідмовної роботи протягом часу t – 0,5. При випробуванні протягом часу t прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що його зібрано з високоякісних деталей.

д) Василь, Тарас і Андрій працюють у банку. За день Василь обслуговує 12 клієнтів, Тарас – 25, Андрій – 10. Ймовірність того, що при розмові з Василем клієнт захоче користуватися послугами банку становить 0,7, з Тарасом – 0,6 і з Андрієм – 0,8. Навмання вибраний клієнт скористувався послугами банку. Визначити ймовірність того, що цю послугу оформив Василь.

Варіант 17

а) У коробці лежать 10 електричних лампочок, з яких 6 штук потужністю 90 Вт та 4 штуки потужністю 60 Вт. Навмання з коробки взяли 3 лампочки. Знайти ймовірність того, що дві з них мають потужність 90 Вт та одна – потужність 60 Вт.

б) На садовій ділянці посаджені 3 дерева: вишня, слива та яблуня. Ймовірність того, що приживеться вишня складає 0,7; для сливи і яблуні ймовірності прижитися відповідно рівні 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність того, що приживеться:

- 1) принаймні одне дерево;
- 2) вишня, слива та яблуня.

в) На столі у викладача лежать три дипломні роботи магістрів і дві дипломні роботи спеціалістів. Викладач навімання бере зі столу почерзі одну за одною дві дипломні роботи. Знайти ймовірність того, що першою він узяв дипломну роботу магістра, а другою – роботу спеціаліста.

г) На одній з виборчих діляниць є дві урни з бюлетенями. В одній з них міститься 1000 бюлетенів, 2% з яких недійсні, а в другій – 800 бюлетенів, 3% з яких недійсні. Знайти ймовірність того, що бюлетень взятий з навмання вибраної урни недійсний.

д) Для набору тексту підручника з “Математики” залучили трьох осіб. Перша особа набрала 40 сторінок, друга – 60, а третя – 100 сторінок тексту. Весь текст помістили в одну папку. Навмання вийнята з папки сторінка тексту виявилася набраною з помилкою. Яка ймовірність того, що вона набрана другою особою, якщо ймовірність зробити помилку для першої з цих осіб дорівнює 0,05, другої – 0,1, а третьої – 0,15?

Варіант 18

а) У ящику лежать 10 м'ячів однакових розмірів: 6 червоні та 4 сині. Навмання з ящика взяли 3 м'ячі. Знайти ймовірність того, що всі вони одного кольору.

б) Екзаменаційний білет містить 3 питання. Ймовірності того, що студент відповість на перше і друге питання однакові і дорівнюють 0,9, а на третє питання – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент відповість:

- 1) на всі три питання з білету;
- 2) принаймні на одне питання.

в) На Новій пошті відправлення чекають 8 посилок: 5 – по місту, а 3 – по країні. Працівник пошти почерзі одну за одною бере 2 посилки. Знайти ймовірність того, що першою він узав послілку, яка потребує відправлення по місту, а другою – послілку з відправкою по країні.

г) Припустимо, що в першій з трьох урн 6 білих і 4 чорних кульки, у другій – 7 білих і 3 чорних, у третій – лише 8 білих. Навмання вибрали одну з трьох урн, а з неї навмання вийняли кульку. Яка ймовірність того, що вона – біла?

д) У студентській групі 70% юнаків та 30% дівчат. При цьому 40% юнаків і 20% дівчат мають смартфони. Після занять в аудиторії був знайдений кимось забутий смартфон. Яка ймовірність того, що він належав юнакові?

Варіант 19

а) Серед 10 електроламп є три нестандартні. Знайти ймовірність того, що серед трьох взятих навмання одночасно електроламп 2 виявляться стандартними і 1 нестандартною.

б) 3 партії виробів товарознавець навмання відбирає вироби вищого гатунку. Ймовірність того, що вибраний виріб буде вищого гатунку складає 0,8; першого гатунку – 0,7; другого гатунку – 0,5. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання відібраних виробів будуть:

- 1) лише 2 вищого гатунку;
- 2) всі різних гатунків.

в) У читальному залі є 6 підручників з теорії ймовірностей, з яких 4 мають тверду обкладинку. Бібліотекар навмання почерзі один за одним бере 2 з цих підручників. Знайти ймовірність того, що і перший, і другий з них будуть мати тверду обкладинку.

г) Припустимо, що в першій з трьох урн 6 білих і 4 чорних кульки, у другій – 7 білих і 3 чорних, у третій – лише 8 білих. Навмання вибрали одну з трьох урн, а з неї навмання вийняли кульку. Яка ймовірність того, що вона – біла?

д) У студентській групі 70% юнаків та 30% дівчат. При цьому 40% юнаків і 20% дівчат мають смартфони. Після занять в аудиторії був знайдений кимось забутий смартфон. Яка ймовірність того, що він належав юнакові?

Варіант 20

а) У ящику в довільному порядку розкладено 20 деталей, причому 5 з них стандартні. Навмання з ящика беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей буде одна стандартна.

б) Шахматисту в турнірі потрібно зіграти з двома суперниками, ймовірності виграшу у яких рівні 0,6 та 0,8 відповідно. Знайти ймовірність того, що він виграє:

- 1) лише в одного суперника;
- 2) принаймні в одного.

в) Андрію подарували 7 шоколадних яєць однакових розмірів: 3 з іграшкою всередині та 4 – без іграшки. Андрій навмання один за одним взяв і з'їв 2 з цих шоколадних яєць. Знайти ймовірність того, що перше, взяте ним яйце буде з іграшкою всередині, а друге – без іграшки.

г) В обчислювальній лабораторії є шість калькуляторів CASIO і чотири CITIZEN. Імовірність того, що за час виконання деякого розрахунку CASIO вийде з ладу складає 0,2, а для CITIZEN ця ймовірність рівна 0,1. Студент навмання бере калькулятор. Знайти ймовірність того, що він до закінчення розрахунків не вийде з ладу.

д) Клієнти оцінюють попередній дизайн продукції. В минулому позитивні відгуки від клієнтів отримали 95% високопопулярних продуктів, 60% середньопопулярних та 10% низькопопулярних продуктів. Крім того, 40% продукції виявилась високопопулярною, 35% була середньопопулярною і 25% мала низьку популярність. Якщо новий дизайн отримав позитивний відгук, то яка ймовірність того, що це буде високопопулярний продукт?

Розділ 3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

3.1 Схема Бернуллі

На практиці часто трапляються випадкові експерименти, які полягають в тому, що одне й те ж випробування проводять декілька разів поспіль. Водночас у кожному випробуванні деякі події можуть відбуватись, а можуть і не відбуватись. Наприклад, підкидання кубика чи монети декілька разів, перевірка на якість виробів, які взяті по одному із певної кількості і т.д.

Повторні випробування називають **незалежними**, якщо здійснення будь-якого результату в n -му за рахунком випробуванні не залежить від результатів у попередніх випробуваннях.

Нехай проводиться n послідовних випробувань, ймовірність події A в кожному випробуванні одна й та сама, а випробування незалежні, тоді таку серію випробувань називають **схемою Бернуллі**.

Якщо випадкова подія A відбувається в кожному випробуванні з ймовірністю $p = P(A)$, тоді вона не відбувається з ймовірністю $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

Ймовірність того, що подія A відбудеться рівно k разів у n незалежних повторних випробуваннях позначають $P_n(k)$ і обчислюють за **формулою Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (3.1)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Нагадаємо, що тут для обчислення комбінації з n елементів по k застосовують формулу (1.4):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Формула Бернуллі дозволяє обчислити не лише ймовірність появи події k разів у n незалежних випробуваннях, але і **ймовірність появи події A** :

1) **у всіх n випробуваннях:**

$$P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n} = C_n^n p^n q^0 = p^n; \quad (3.3)$$

2) **нуль разів:**

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n; \quad (3.4)$$

3) **не більше m разів:**

$$P_n(k \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m); \quad (3.5)$$

4) **менше m разів:**

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1); \quad (3.6)$$

5) *не менше m разів:*

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n); \quad (3.7)$$

6) *більше m разів:*

$$P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n); \quad (3.8)$$

7) *не менше k_i разів і не більше k_j разів:*

$$P_n(m_i \leq k \leq m_j) = P_n(k_i) + P_n(k_{i+1}) + \dots + P_n(k_j); \quad (3.9)$$

8) *принаймні один раз:*

$$P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - q^n. \quad (3.10)$$

Приклад 3.1.

Ймовірність того, що в один день регіональне представництво Укравтодору в Київській області вкладеться в норму витрат на транспорт, дорівнює $\frac{3}{4}$. Яка ймовірність того, що лише в три дні робочого тижня воно вкладеться в норму витрат?

Розв'язання.

Один день робочого тижня можна розглядати як одне незалежне випробування, а весь робочий тиждень як послідовність $n = 5$ незалежних випробувань.

Подія A – регіональне представництво вкладеться в норму витрат на транспорт може настати з ймовірністю $p = \frac{3}{4}$, або не настати з ймовірністю

$q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ в одному незалежному випробуванні. Ймовірність того, що подія A настане рівно $k = 3$ рази в $n = 5$ незалежних випробуваннях обчислимо за формулою Бернуллі (3.1):

$$\begin{aligned} P_5(3) &= C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3} = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \frac{27}{4^3 \cdot 4^2} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3!} \cdot \frac{27}{4^3 \cdot 4^2} = \frac{270}{1027} \approx 0,264 \end{aligned}$$

Приклад 3.2.

Статистикою встановлено, що із кожної тисячі новонароджених дітей Житомирської області, в середньому народжуються 485 дівчат і 515 хлопчиків. У деякої сім'ї є 5 дітей. Знайти ймовірність того, що серед тих дітей не більше трьох дівчат.

Розв'язання.

Згідно з умовою задачі, ймовірність народження дівчинки $p = 0,485$, а ймовірність народження хлопчика $q = 0,515$, $n = 5$, $m = 3$.

Вимога, щоб в сім'ї було не більше трьох дівчат, буде виконуватися згідно формули (3.5), коли:

$$P_5(k \leq 3) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3).$$

При цьому ймовірність народження дівчаток нуль разів у цій сім'ї за формулою (3.4):

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^{5-0} = q^5 = 0,515^5 \approx 0,04.$$

За формулою (3.1) ймовірність народження:

- однієї дівчинки і чотирьох хлопців:

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^{5-1} = 5 \cdot 0,485 \cdot 0,515^4 \approx 0,17,$$

- двох дівчаток і трьох хлопців:

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0,485^2 \cdot 0,515^3 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,485^2 \cdot 0,515^3 \approx 0,33,$$

- трьох дівчаток і двох хлопців:

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0,485^3 \cdot 0,515^2 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,485^3 \cdot 0,515^2 \approx 0,31.$$

Отже,

$$P_5(k \leq 3) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) \approx 0,85.$$

3.2 Найімовірніше настання події під час повторних випробувань

Для різних k ймовірності $P_n(k)$ набувають різних значень. Число k_0 , при якому ймовірність $P_n(k_0)$ найбільша, називають **найімовірнішим числом настання події А**. Його визначають співвідношенням:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (3.11)$$

Число k_0 завжди має бути цілим. Тому якщо границі інтервалу (3.11) є дробовими числами, то отримують одне значення найбільш імовірного числа k_0 . Якщо ж границі цілі числа, то мають два значення найбільш імовірного числа.

Приклад 3.3.

Автошкола НТУ налічує 9 автомобілів. Відділ технічного контролю перевіряє стан кожного автомобіля перед його виходом у рейс. Ймовірність справності автомобіля в один з днів склала 0,85. Знайти найімовірніше число автомобілів, які зможуть вийти в рейс цього дня.

Розв'язання.

За умовою $n = 9$, $p = 0,85$, $q = 0,15$. Найімовірніше число k_0 автомобілів в робочому стані задовольняє подвійну нерівність (3.11):

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

$$9 \cdot 0,85 - 0,15 \leq k_0 \leq 9 \cdot 0,85 + 0,85,$$

$$7,5 \leq k_0 \leq 8,5.$$

Оскільки границі $np - q = 7,5$ та $np + p = 8,5$ є дробовими числами, то k_0 має бути одним цілим числом. Отже, найімовірніше в рейс цього дня можуть вийти 8 автомобілів.

Приклад 3.4.

Визначити найімовірне число збитих літаків в групі з 13 бомбардувальників, якщо літаки збивають незалежно один від одного. Ймовірність збиття одного літака складає $4/7$.

Розв'язання.

За умовою $n = 13$, $p = \frac{4}{7}$, $q = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$. Найімовірніше число k_0 збитих літаків задовольняє подвійну нерівність (3.11):

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

$$13 \cdot \frac{4}{7} - \frac{3}{7} \leq k_0 \leq 13 \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7},$$

$$7 \leq k_0 \leq 8.$$

Оскільки границі $np - q = 7$ та $np + p = 8$ є цілими числами, то отримуємо два значення найбільш імовірного числа: $k_0 = 7$ та $k_0 = 8$.

3.3 Локальна теорема Муавра-Лапласа

Формула Бернуллі дає точні значення ймовірностей $P_n(k)$, проте при великих значеннях n вона приводить до громіздких обчислень. Тому, якщо число n досить велике, то для обчислення ймовірності появи події A k разів у n незалежних випробуваннях застосовують наближену *формулу локальної теореми Лапласа*.

Локальна теорема Муавра-Лапласа: якщо ймовірність p настання події A в n незалежних випробуваннях стала і задовольняє нерівність $0 < p < 1$, то ймовірність того, що подія з'явиться k разів у n незалежних випробуваннях, наближено дорівнює:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (3.12)$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

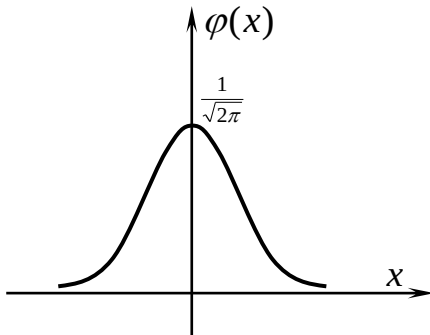


Рис. 3.1

Функцію $\varphi(x)$ називають функцією Гауса. Її графік зображено на рис. 3.1.

Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Для функції $\varphi(x)$ складені таблиці, в яких за заданими значеннями x знаходять значення функції (див. – додатки, *табл. 1*), але лише для аргументів $0 \leq x \leq 4$. Для інших значень аргументів приймають: $\varphi(x > 4) = 0$.

Приклад 3.5.

У масовому виробництві автомобільних шин ймовірність браку складає 0,1. Яка ймовірність того, що серед 500 відібраних шин буде 30 бракованих?

Розв'язання.

За умовою $n = 500$, $k = 30$, $p = 0,1$, $q = 1 - 0,1 = 0,9$.

Використовуючи локальну теорему Муавра-Лапласа (3.12), отримуємо:

$$P_{500}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \cdot \varphi(x),$$

де
$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 500 \cdot 0,1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = \frac{-20}{6,7} = -2,98.$$

За *табл. 1* додатку знаходимо $\varphi(-2,98) = \varphi(2,98) = 0,0047$.

Тому
$$P_{500}(30) \approx \frac{1}{6,7} \cdot 0,0047 \approx 0,001.$$

3.4 Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

У деяких випадках необхідно обчислити ймовірність того, що у n випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$. Тоді застосовують *інтегральну теорему Лапласа*.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа: якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A стала і задовольняє нерівність $0 < p < 1$, то ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 , але не більше k_2 раз наближено дорівнює:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (3.13)$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad (3.14)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, графік якої зображений на рис. 3.2.

Функція $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Значення функції $\Phi(x)$ наведені у спеціальних таблицях (див. – додатки, табл. 2) до $x = 5$, тому для $x \geq 5$ вважають $\Phi(x) = 0,5$.

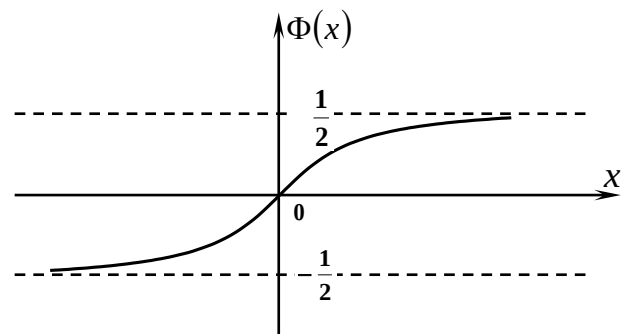


Рис. 3.2

Приклад 3.6.

Ймовірність того, що відвідувач АЗС замовить бензин марки А-95, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 150 відвідувачів бензин А-95 замовлять не менше 75 і не більше 110 відвідувачів.

Розв'язання.

За умовою $n=150$, $k_1=75$, $k_2=110$, $p=0,8$, $q=0,2$.

Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$np = 150 \cdot 0,8 = 120, \quad npq = 150 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 24, \quad \sqrt{npq} = 4,89,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 120}{4,89} = -2,05, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 120}{4,89} = -9,20,$$

$$\begin{aligned} P_{150}(75 \leq k \leq 110) &= \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx \Phi(-2,05) - \Phi(-9,20) = -\Phi(2,05) + \Phi(9,20) = \\ &= -0,47982 + 0,5 = 0,02018. \end{aligned}$$

3.4 Теорема Пуассона

Якщо число n проведених випробувань велике ($n \geq 50$), а ймовірність появи події A в кожному випробуванні досить мала $0 < p < 0,1$, то ймовірність появи події A в цих n незалежних повторних випробуваннях k разів обчислюють за **формулою Пуассона**:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (3.15)$$

де $\lambda = np$ – середнє число появ події A у n випробуваннях.

Значення $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ наводяться у спеціальних таблицях (див. – додатки, *табл. 3*)

Приклад 3.7.

Якщо лівші в середньому складають 2%, то яка ймовірність того, що серед 100 чоловік не більше трьох ліворуких?

Розв'язання.

Скористаємося граничною теоремою Пуассона.

За умовою $n = 100$, $p = 0,02$, $\lambda = np = 100 \cdot 0,02 = 2$.

Тоді $P_{100}(0 \leq k \leq 3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) \approx$

$$\approx \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} + \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} + \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} + \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} \approx$$

$$\approx 0,1353 + 0,2707 + 0,2707 + 0,1804 \approx 0,8571.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дати означення повторних незалежних випробувань.
2. Напишіть формулу Бернуллі.
3. Як знаходять найімовірніше число настання події при послідовності незалежних випробувань?
4. Сформулюйте локальну теорему Муавра–Лапласа. У якому випадку її застосовують?
5. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра–Лапласа. У якому випадку її застосовують?
6. Напишіть формулу Пуассона. У якому випадку її застосовують?

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Практичне використання формули Бернуллі та її наслідків

1. Монету підкинуто 6 разів. Знайти ймовірність того, що при цьому герб випаде 4 рази.

2. Диспетчер відділу доставки піци отримує замовлення на фірмову піцу та деякі інші види піц. У середньому 40% клієнтів замовляють фірмову піцу. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання обраних замовлень буде лише одне замовлення на фірмову піцу.

3. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі складає 0,8. По мішені виконано чотири незалежних постріли. Знайти ймовірність того, що при цьому буде:

- а) хоча б одне влучення в мішень;
- б) не менше трьох влучень;
- в) не більше одного влучення.

4. На АЗС є п'ять заправних колонок. Ймовірність виходу з ладу кожної колонки протягом року складає 0,2. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться ремонтувати:

- а) нуль колонок;
- б) не більше двох колонок?

5. Бізнесмен, вивчивши попит ринку на нові сучасні спортивні автомобілі, вирішив продати пробну партію з дев'яти таких автомобілів. Ймовірність отримати високий прибуток від продажу кожної машини оцінена в 0,8. Яка ймовірність отримати високий прибуток від продажу:

- а) трьох автомобілів;
- б) не більше трьох автомобілів?

6. Ймовірність того, що витрата бензину автопарком протягом місяця не перевищує встановленої норми, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що за півроку роботи автопарк укладеться в норму витрат бензину протягом чотирьох місяців.

7. Знайти найімовірніше число нестандартних деталей, якщо випробовується 100 деталей, а ймовірність того, що деталь нестандартна дорівнює 0,1.

8. Військовий підрозділ стріляє по групі ворогів з 24 танків. Ймовірність того, що танк буде підбитий, дорівнює 0,6. Визначити найімовірніше число підбитих танків.

9. Співробітниками місцевої поліції було зібрано статистичні дані щодо тверезості водіїв за кермом (методом зупинення автомобілів навмання). Ймовірність виявлення нетверезого водія за кермом складає 10%. Яка ймовірність того, що з чотирьох перевірених водіїв у стані сп'яніння будуть перебувати два водії?

Застосування граничних теорем

10. Підручник надруковано тиражем 10000 примірників. Ймовірність бракованого брошурування підручника складає 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

11. Ймовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що з 300 випробувань успішними будуть 75 випробувань?

12. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу рівна 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t із 100 приладів вийде з ладу від 6 до 18 приладів.

13. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на комутатор протягом години, дорівнює 0,02. Телефонна станція обслуговує 200 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години зателефонують 3 абоненти?

14. Знайти ймовірність того, що при 1000 підкиданнях грального кубика випаде від 160 до 200 шісток.

15. Ймовірність того, що кожен відвідувач СТО замовить діагностику двигуна автомобіля, дорівнює 0,64. Знайти ймовірність того, що із 100 відвідувачів замовлять цю діагностику:

- а) не менше 60 і не більше 70 відвідувачів;
- б) не менше 60 відвідувачів;
- в) не більше ніж 75 відвідувачів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Практичне використання формули Бернуллі та її наслідків

1. У магазині працюють 5 холодильників. Ймовірність виходу з ладу кожного холодильника протягом року складає 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом року ремонту вимагатиме:

- а) 4 холодильники;
- б) не менше 2-х холодильників;
- в) не більше 1 холодильника.

2. Випробовують кожен із 15 елементів деякого пристрою. Ймовірність того, що кожен елемент витримає випробування складає 0,9. Знайти найімовірніше число елементів, які витримають випробування.

Застосування граничних теорем

3. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини складає 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини нитка обірветься на п'ятьох веретенах.

4. Ймовірність проростання насіння пшениці складає 95%. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних зерен не проростуть від 80 до 120 зерен.

5. Записи страхової компанії показали, що 30% власників договорів страхування подали запити на відшкодування коштів. Для перевірки було відібрано 15 чоловік, які мають договори. Знайти ймовірність того, що протягом року від них надійде п'ять запитів на відшкодування коштів.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

Варіант 1

а) Серед великої кількості виробів, що знаходяться в комплекті, 30 % – нестандартні. Знайти ймовірність того, що серед 5-ти виробів, навмання взятих із комплекту, буде один нестандартний.

б) Укладено чотири однотипних договори страхування терміном на один рік. Ймовірність того, що за будь-яким договором протягом року надійде запит на відшкодування, складає 0,9. Знайти найімовірніше число запитів.

в) За даними технологічного контролю в середньому 2% годинників, що виготовляють на заводі, потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додаткового регулювання потребуватимуть 3 годинники.

г) Військовий підрозділ проводить обстріл літака з піхотної зброї. Імовірність влучення окремим пострілом при цьому складає 0,001. Знайти ймовірність влучення в ціль чотирма пострілами, якщо зроблено 5000 пострілів.

Варіант 2

а) У середньому 20% пакетів акцій на біржі продаються за початково заявленою ціною. За деякий проміжок часу внаслідок торгів було продано п'ять пакетів акцій. Знайти ймовірність того, що за початково заявленою ціною продали 2 з них.

б) Знайти найімовірніше число нестандартних деталей, якщо випробовується 100 деталей, а ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1.

в) За статистичними даними у середньому 1 % пасажирів відмовляється від рейсу. Знайти ймовірність того, що з 300 пасажирів, які мають квитки на рейс, відмовляться від польоту 4 пасажирів.

г) Фабрика випускає 75 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що з 400 виробів, виготовлених фабрикою, 250 виробів будуть першосортними.

Варіант 3

а) Місцева поліція сформувала статистичні дані щодо тверезості водіїв за кермом шляхом зупинення автомобілів навмання. Ймовірність виявлення нетверезого водія склала 0,2. Яка ймовірність, що серед 5-ти перевірених водіїв 2 водії будуть знаходитися в стані сп'яніння.

б) Знайти найімовірніше число нестандартних деталей, якщо випробовується 100 деталей, а ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1.

в) Знайти ймовірність того, що зі 100-та зернин зійде рівно 80, якщо ймовірність їх сходження - 0,8.

г) Завод відправив до магазину 2000 пляшок мінеральної води у скляній тарі. Ймовірність пошкодження пляшки під час транспортування дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що під час транспортування буде пошкоджено п'ять пляшок.

Варіант 4

а) Ймовірність того, що витрати електроенергії протягом доби не перевищили норму, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрати електроенергії впродовж 2-ох днів не перевищать норму.

б) Ймовірність того, що професійний футболіст не влучить із середини поля у ворота противника, дорівнює 0,1. Знайти найімовірніше число його промахів у територію воріт при 300 спробах.

в) Телевізійний завод відвантажив на базу 5000 справних кольорових телевізорів. Ймовірність того, що під час транспортування їх може бути пошкоджено, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу потраплять три пошкоджені телевізори.

г) Зі статистичних даних відомо, що ймовірність захворіти грипом для більшості людей складає 0,1. Яка ймовірність того, що із 100 перевірених осіб хворими виявляться від 20 до 50 осіб?

Варіант 5

а) Ймовірність того, що взята навмання деталь є нестандартною, становить 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 6-ти навмання взятих деталей, нестандартними будуть 4 деталі.

б) Знайти найімовірніше число лекцій, які відвідав студент з 75 запланованих за рік, якщо ймовірність відвідування кожної лекції дорівнює 0,85.

в) Ймовірність того, що інвестиційний проект принесе через рік прибуток, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 15 інвестиційних проектів прибутковими виявляться 10 проектів.

г) Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують 5 абонентів.

Варіант 6

а) Серед волокон бавовни в середньому виділяють 20% коротких і 80% довгих. Обчислити ймовірність того, що в жмуті з шести бавовняних волокон короткими виявляться два волокна.

б) У цеху працюють 46 верстатів. Ймовірність надійної роботи кожного верстата складає 0,8. Обчислити найімовірніше число працюючих в даний момент верстатів у цеху.

в) Служба податків визначила, що 50% всіх особистих декларацій про прибуток містять принаймні одну помилку. Якщо випадково відібрати двадцять декларацій, то яка ймовірність того, що рівно 6 із них будуть містити принаймні одну помилку?

г) Автобіографію відомого діяча вирішили видати тиражем в 1000 екземплярів. При видавництві ймовірність автобіографії бути неправильно зброшурованою складає 0,002. Знайти ймовірність того, що вказаний тираж міститиме 7 бракованих автобіографій.

Варіант 7

а) Митниця дає офіційну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларують весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 6 осіб, які повертаються з-за кордону, то яка ймовірність того, що 4 з них не задекларують товар, який обкладається податком?

б) Садівник весною посадив 6 дерев. З його досвіду минулих років відомо, що після зимування 7 дерев із кожних 10-ти приживалися. Яка кількість дерев, що приживуться наступної весни, є найбільш імовірною для цього садівника?

в) Знайти ймовірність того, що герб випаде не менш ніж 48 разів, і не більш ніж 52 рази, якщо монету підкидають 100 разів.

г) Під час виробництва цементу у 0,3% готової продукції спостерігається пошкодження упаковки. Яка ймовірність того, що в партії з 1000 мішків цементу пошкодженими виявляться чотири мішки?

Варіант 8

а) Визначити ймовірність того, що серед п'яти дітей родини три дівчинки.

б) Знайти найімовірніше число зіпсованих тістечок, якщо перевіряють якість 100 тістечок, а ймовірність їх псування, складає 0,3.

в) В одержаній партії текстильних виробів виявлено 0,6% браку. Яка ймовірність при випадковому відборі 1000 виробів виявити шість бракованих?

г) В інкубатор закладено 750 яєць. Ймовірність того, що з яйця вилупиться курочка складає 0,5. Яка ймовірність того, що з закладених яєць вилупляться 428 курочок?

Варіант 9

а) Статистичні дані свідчать, що 90% сімей мають принаймні один телевізор. Яка ймовірність того, що 2 з 4-х навмання обраних сімей мають принаймні один телевізор?

б) Ймовірність несплати податків для кожного з 500 підприємців регіону рівна 0,1. Знайти найімовірнішу кількість підприємців регіону, які не сплачують податків.

в) У регіоні 75% фермерів мають річний прибуток, що перевищує 1 млн гривень. Навмання відібрано 400 фермерів. Знайти ймовірність того, що в їх числі виявляться 320 фермерів, річний прибуток яких перевищує 1 млн грн.

г) Під час виробництва деякої продукції ймовірність випуску нестандартного виробу становить 0,01. Яка ймовірність, що в партії зі 100 виробів цієї продукції є 2 нестандартні вироби?

Варіант 10

а) Статистичні дані свідчать, що 90% сімей мають принаймні один телевізор. Яка ймовірність того, що 2 з 4-х навмання обраних сімей мають принаймні один телевізор?

б) Доля деталей вищого ґатунку в роботі токаря складає 30%. Чому дорівнює найімовірніше число деталей вищого ґатунку у випадково відібраній партії із 75 деталей, які виготовив цей токар?

в) Нехай імовірність виробництва бракованого виробу дорівнює 0,008. Знайти ймовірність того, що серед 1000 таких виробів буде 5 бракованих.

г) Ймовірність того, що власники квартир не мають заборгованості в оплаті за використану електроенергію в одному з будинків міста складає 0,6. Яка ймовірність того, що з 2400 власників квартир цього будинку 1400 не мають названої заборгованості?

Варіант 11

а) Підкинули тричі монету. Яка ймовірність того, що випало два герба?

б) Товарознавець оглядає 24 зразки товару. Ймовірність того, що кожен із зразків буде визнаним придатний до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найбільш імовірну кількість зразків товару, які товарознавець визнає придатними до продажу.

в) Ймовірність того, що пара взуття, яка взята навмання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку, дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку?

г) На одному факультеті навчаються 730 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно трьох студентів цього факультету?

Варіант 12

а) Ймовірність того, що протягом гарантійного терміну телевізор вийде з ладу, рівна 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 4 телевізорів лише 1 вийде з ладу під час гарантійного терміну.

б) Знайти найімовірніше число здачі заліку дев'ятьма студентами, якщо кожен із них вивчив 70% матеріалу.

в) Ймовірність виготовлення верстатом деталі вищого ґатунку складає 0,4. Знайти наближено ймовірність того, що серед навмання взятих 26 деталей, виготовлених верстатом, половина виявляться вищого ґатунку.

г) Завод відправив на базу 5000 доброякісних виробів. Імовірність пошкодження виробів у процесі їх транспортування, складає 0,0002. Визначити ймовірність того, що на базу доставлять три неякісні вироби.

Варіант 13

а) Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія A відбудеться 2 рази, якщо в кожному випробуванні ймовірність її появи становить 0,8.

б) Під час використання нового технологічного процесу 80% усієї виготовленої продукції підприємства мала найвищу якість. Знайти найбільш імовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виробів, виготовлених цим підприємством з використання нового технологічного процесу.

в) Ймовірність влучення в мішень після одного пострілу становить 0,2. Визначити ймовірність того, що під час здійснення 400 пострілів мішень буде вражена 80 разів.

г) На потоці навчаються 150 студентів. Припустимо, що кожен із цих студентів відвідує лекцію з ймовірністю 0,8. Яка ймовірність того, що на лекції присутні від 115 до 140 студентів?

Варіант 14

а) З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого ґатунку. Ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться вищого ґатунку становить 0,8. Визначте ймовірність того, що з трьох перевірених виробів два вироби будуть вищого ґатунку.

б) Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня.

в) З усієї кількості виготовлених бетонних плит 60% становить продукція вищого сорту. Взяли 200 виготовлених плит. Визначити ймовірність того, що серед них кількість плит вищого сорту знаходиться в межах від 120 до 150 включно.

г) На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходять 100000 автомобілів. При цьому ймовірність виготовлення бракованого автомобіля складає 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 4 бракованих автомобілі.

Варіант 15

а) Ймовірність виграшу по лотерейному квитку становить 0,6. Куплено шість білетів. Визначте ймовірність того, що серед них буде чотири виграшних білети.

б) У результаті багаторічних спостережень встановлено, що ймовірність випадіння дощу 1 жовтня в певному місті дорівнює $1/7$. Визначте найбільш імовірну кількість дощових днів 1 жовтня в цьому місті за 40 років.

в) На одному з телеканалів у кожній з передач ймовірність появи реклами кави складає 0,2. Знайти ймовірність появи реклами кави 8 разів у 100 передачах.

г) На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок цієї фабрики льодяників буде не менше 60 і не більше 80.

Варіант 16

а) Компанія володіє мережею дилерів на біржі. Ймовірність збиткового ведення торгів кожним дилером становить 0,3. Знайти ймовірність того, що з п'яти дилерів будуть у збитках два.

б) Виробник детекторів брехні вимагає, щоб детектори могли чітко розрізняти правильні відповіді від неправильних на 85%. Детектор тестують використовуючи 50 запитань. Визначте найбільш імовірне число правильних відповідей.

в) Відомо, що 20% всіх риб у ставку складають карасі. Знайти ймовірність того, що серед 400 виловлених риб з цього ставка буде 80 карасів.

г) При транспортуванні деталей може пошкодитися із ймовірністю 0,0001. Яка ймовірність того, що при транспортуванні 3000 таких деталей буде пошкоджено 3 з них?

Варіант 17

а) Для успішного тестування з математики студент має дати 3 правильні відповіді на 5 запитань тесту. Ймовірність того, що він правильно відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе тест з математики.

б) У місцевій лікарні 55% усіх новонароджених - хлопчики. Одного дня там народилося 5 малюків. Яка найімовірніша серед них кількість хлопчиків?

в) Ймовірність того, що телевізор не пройшов передпродажну перевірку складає 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 телевізорів, що є на складі, не перевірено від 70 до 100.

г) Банк обслуговує кредитні картки 6000 клієнтів, для кожного з яких ймовірність перевищити кредит протягом тижня складає $1/6$. Знайти ймовірність того, що протягом тижня перевищать кредит 900 клієнтів банку.

Варіант 18

а) Адвокат виграє в суді в середньому 70% справ. Знайти ймовірність того, що з п'яти справ він виграє чотири.

б) Оптова база забезпечує товаром 10 магазинів, від кожного з яких щодня може надійти замовлення з ймовірністю 0,4 незалежно від замовлень інших магазинів. Потрібно знайти найімовірніше число щоденних замовлень.

в) По каналу зв'язку передається помилковий сигнал в одному з 100 випадків. Яка ймовірність появи 5 помилок при передачі 200 таких незалежних сигналів?

г) Відомо, що 80% спеціалістів району мають вищу освіту. Знайти ймовірність того, що із 100 навмання відібраних людей цього району вищу освіту мають 90 людей.

Варіант 19

а) 30% виробів підприємства проходять тестовий контроль. Покупець придбав 6 виробів підприємства. Чому дорівнює ймовірність того, що з них 4 вироби проходили тестовий контроль?

б) Ймовірність того, що окремий пасажир запізниться на потяг, складає 0,1. Знайти найімовірніше число пасажирів, що запізняться на потяг, якщо їх загальна кількість 450 чоловік.

в) Фабрика випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?

г) Лабораторним методом виявлено, що ймовірність сходження зерен певної рослини складає 80%. Визначте ймовірність того, що із 1 000 посаджених зерен цієї рослини проростуть від 820 до 840 зерен.

Варіант 20

а) Зроблене щеплення від грипу дає позитивний результат у 60% випадків. Знайти ймовірність того, що з п'яти щеплених осіб воно запобігло захворюванню на грип трьом з них.

б) Випробовується кожен з 15-ти елементів деякого пристрою. Ймовірність успішного проходження випробування для кожного елемента пристрою однакова і дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число елементів цього пристрою, які пройдуть дане випробування.

в) Знайти ймовірність того, що при 1000 підкиданнях грального кубика випаде від 160 до 200 шісток.

г) Комбінат випускає продукцію, 70% якої – найвищої якості. Якою є ймовірність того, що серед 200 одиниць цієї продукції 110 буде найвищої якості?

Розділ 4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1 Види випадкових величин та способи їх задання

У теорії ймовірностей, поряд з поняттям випадкова подія і ймовірність, одним з основних є поняття випадкової величини. Наприклад, час безвідмовної роботи деякого приладу, кількість випадань герба за багаторазового підкидання монети тощо.

Випадковою величиною називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути лише одного числового значення, яке зумовлене результатом експерименту.

Отже, **випадковою величиною**, пов'язаною з певним випробуванням, називають величину X , яка під час випробування може набувати одного і лише одного можливого числового значення, яке наперед невідоме і не залежить від випадкових причин, що попередньо не можуть бути враховані.

Між випадковими подіями і випадковими величинами є тісний зв'язок. Випадкова подія – це якісна характеристика випадкового результату випробування, а випадкова величина – його кількісна характеристика.

Випадкові величини поділяють на два типи: **дискретні** та **неперервні**.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути відокремлених, ізольованих одне від одного, числових значень з відповідними ймовірностями.

Іншими словами, вона має таку властивість, що кожне з її можливих значень має окіл, який вже не містить жодного з інших значень цієї самої величини. Всі можливі значення дискретної випадкової величини можуть бути пронумеровані: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Кількість значень дискретної випадкової величини може бути кінцевою, наприклад, число пасажирів у вагоні метро, або зчисленою, наприклад, кількість крапель дощу, що впали на дах дому за останні 50 років.

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може набувати будь-якого числового значення з певного обмеженого інтервалу (a, b) або необмеженого інтервалу $(-\infty, +\infty)$. Наприклад, випадкова величина X – час безвідмовної роботи приладу, неперервна, оскільки її можливе значення $t > 0$.

Будь-яка випадкова величина задається своїм законом розподілу. Співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими приймають ці значення, називають **законом розподілу ймовірностей випадкової величини**

4.2 Загальні закони розподілу дискретних випадкових величин (ДВВ)

Загальними законами розподілу ДВВ є:

1. **Ряд розподілу** ДВВ X – таблиця, в якій перераховані всі можливі значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ випадкової величини (у верхньому рядку в порядку зростання) і відповідні їм ймовірності $p_1, p_2, \dots, p_n$ (у нижньому рядку):

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

.

Оскільки в результаті випробування випадкова величина X набуває одного і тільки одного можливого значення, то події $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ утворюють повну групу, тому:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, \quad (4.1)$$

тобто в ряді розподілу ДВВ завжди $p_i = P(X = x_i)$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

2. Графічне зображення ряду розподілу – **многокутник (полігон) розподілу** (по осі абсцис відкладають можливі значення x_n випадкової величини X , а по осі ординат – імовірності p_n цих значень; точки (x_n, p_n) послідовно з'єднують відрізками прямих).

3. **Функція розподілу (інтегральний закон розподілу)** випадкової величини X – функція $F(x)$, що дорівнює ймовірності $P(X < x)$ того, що випадкова величина X буде менше довільно вибраного значення x .

Функцію розподілу $F(x)$ для ДВВ X обчислюють за формулою:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i. \quad (4.2)$$

Властивості функції розподілу випадкової величини:

1. Функція розподілу $F(x)$ є невід'ємною функцією в межах від нуля до одиниці: $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. При зростанні x від $-\infty$ до $+\infty$ функція розподілу $F(x)$ змінюється від нуля до одиниці: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
3. Функція розподілу $F(x)$ неспадна: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;
4. Функція розподілу $F(x)$ неперервна зліва: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;
5. Ймовірність потрапляння випадкової величини X в проміжок $[a, b)$, дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (4.3)$$

Приклад 4.1.

Незалежно один від одного працюють три елементи. Перший протягом доби працює безвідмовно з ймовірністю 0,8, другий – 0,6, третій – 0,3. Випадкова величина X дорівнює числу безвідмовних елементів. Скласти ряд розподілу та знайти функцію розподілу випадкової величини X .

Розв'язання.

Випадкова величина X може набувати можливих значень:

- 0 (жодного безвідмовного елемента);
- 1 (один безвідмовний елемент);
- 2 (два безвідмовних елементи);
- 3 (три безвідмовних елементи).

Позначимо через h_1, h_2, h_3 ймовірності безвідмовної роботи першого, другого і третього елементів. Тоді за умовою задачі $h_1 = 0,8, h_2 = 0,6, h_3 = 0,3$, а ймовірності виходу з ладу цих елементів відповідно дорівнюють $\bar{h}_1 = 0,2, \bar{h}_2 = 0,4, \bar{h}_3 = 0,7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей обчислимо ймовірності, з якими випадкова величина X набуває можливих значень:

$$p_0 = P\{X = 0\} = \bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3 = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,056;$$

$$\begin{aligned} p_1 &= P\{X = 1\} = h_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3 + \bar{h}_1 h_2 \bar{h}_3 + \bar{h}_1 \bar{h}_2 h_3 = \\ &= 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,332 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= P\{X = 2\} = h_1 h_2 \bar{h}_3 + h_1 \bar{h}_2 h_3 + \bar{h}_1 h_2 h_3 = \\ &= 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,468 \end{aligned}$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = h_1 h_2 h_3 = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,144.$$

Для перевірки обчислень варто переконатися, що $\sum_{i=0}^3 p_i = 1$:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,056 + 0,332 + 0,468 + 0,144 = 1.$$

Отже, ряд розподілу величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
p	0,056	0,332	0,468	0,144

Оскільки, функція розподілу $F(x)$ для ДВВ X визначається рівністю:
 $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$, тоді

якщо $x \leq 0$, то $F(x) = P(X < 0) = \sum_{x_i < 0} p_i = 0$;

якщо $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(X < 1) = \sum_{x_i < 1} p_i = P(X = 0) = 0,056$;

якщо $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(X < 2) = \sum_{x_i < 2} p_i = P(X = 0) + P(X = 1) =$
 $= 0,056 + 0,332 = 0,388$;

якщо $2 < x \leq 3$, то

$$F(x) = P(X < 3) = \sum_{x_i < 3} p_i = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= 0,056 + 0,332 + 0,468 = 0,856$$
;

якщо $x > 3$, то

$$F(x) = P(X < +\infty) = \sum_{x_i < +\infty} p_i = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= 0,056 + 0,332 + 0,468 + 0,144 = 1.$$

Таким чином, шукана функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,056, & 0 < x \leq 1, \\ 0,388, & 1 < x \leq 2, \\ 0,856, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

4.3 Функція та щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини (НВВ)

Закон розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин може бути заданий *функцією розподілу* та *щільністю розподілу*.

Нагадаємо, що *функцією розподілу (інтегральним законом розподілу)* випадкової величини X називають функцію $F(x)$, яка визначає ймовірність, того що випадкова величина X в результаті випробування набуде значення, менше x , тобто

$$F(x) = P(X < x). \quad (4.4)$$

Геометричний зміст цієї рівності полягає в тому, що $F(x)$ – це ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке зображається на числовій осі точкою, розміщеною лівіше точки x .

Щільністю розподілу ймовірностей (диференціальним законом розподілу) $f(x)$ неперервної випадкової величини X називають першу похідну від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \quad (4.5)$$

З даного означення випливає, що функція розподілу ймовірностей є первісною для щільності розподілу:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \quad (4.6)$$

Властивості щільності розподілу:

1. Щільність розподілу ймовірностей є невід'ємною функцією: $f(x) \geq 0$.
2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (4.7)$$

3. Графік функції $f(x)$ називають **кривою розподілу**.

Теорема: Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення з інтервалу (a,b) , дорівнює визначеному інтегралу від щільності розподілу в межах від a до b :

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (4.8)$$

Приклад 4.2.

Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу $F(x)$:

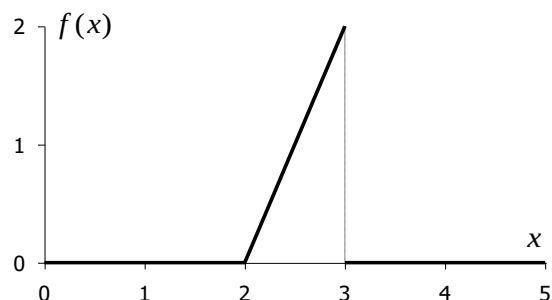
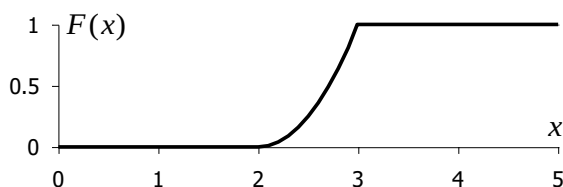
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

- а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;
- б) побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$;
- в) визначити двома способами (за функціями $f(x)$ і $F(x)$) ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(2,2; 2,8)$.

Розв'язання.

- а) Оскільки $f(x) = F'(x)$, то маємо: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2(x-2), & 2 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

б)



в) І спосіб (за функцією розподілу): $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

$$P(2,2 < X < 2,8) = F(2,8) - F(2,2) = (2,8 - 2)^2 - (2,2 - 2)^2 = 0,6.$$

II спосіб (за щільністю ймовірності): $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

$$\begin{aligned} P(2,2 < X < 2,8) &= \int_{2,2}^{2,8} 2(x-2)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{2,2}^{2,8} = \\ &= (2,8^2 - 4 \cdot 2,8) - (2,2^2 - 4 \cdot 2,2) = 0,6 \end{aligned}$$

Приклад 4.3.

Випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2, \\ \frac{1}{2} \cos x, & -\pi/2 < x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X .

Розв'язання.

$F(x)$ знаходимо за формулою (4.6): $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Нехай $x \leq -\frac{\pi}{2}$, тоді $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.

Нехай $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, тоді $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt =$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dt + \int_{-\pi/2}^x \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t \Bigg|_{-\pi/2}^x = \frac{1}{2} (\sin x - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} (\sin x + 1).$$

Нехай $x > \frac{\pi}{2}$, тоді $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt =$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^x 0dt = \frac{1}{2} \sin t \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) = 1.$$

$$\text{Отже, } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2, \\ \frac{1}{2} (\sin x + 1), & -\pi/2 < x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

4.4 Числові характеристики випадкових величин

При розв'язанні багатьох задач теорії ймовірностей немає необхідності знаходити закон розподілу випадкової величини повністю, часто виявляється достатнім визначити тільки деякі параметри цього закону, які називають числовими характеристиками.

Найбільш важливими з них є:

- математичне сподівання, яке характеризує середнє значення випадкової величини,
- дисперсія, яка характеризує розмір можливого відхилення (розсіювання) значень випадкової величини від свого математичного сподівання.
- середнє квадратичне відхилення.

Зупинимось на цих характеристиках детальніше.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X , яка задана рядом розподілу:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

називають суму добутків всіх можливих значень випадкової величини на їх ймовірності, тобто:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n,$$

або

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (4.9)$$

за умови, що ряд в правій частині абсолютно збіжний.

Математичне сподівання є центром розсіювання випадкової величини і воно відповідає середньому значенню випадкової величини. Вимірюється в тих самих одиницях, що й сама випадкова величина X .

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X , яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називають невластний інтеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (4.10)$$

за умови, що він абсолютно збіжний.

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать проміжку $[a, b]$, то:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (4.11)$$

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XYZ) = M(X)M(Y)M(Z).$$

4. Математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X + Y + Z) = M(X) + M(Y) + M(Z).$$

Відхиленням називають різницю між випадковою величиною і її математичним сподіванням:

$$X - M(X).$$

Математичне сподівання відхилення дорівнює нулю:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Дисперсією (розсіюванням) випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]. \quad (4.12)$$

При обчисленні дисперсії зручно використовувати теорему:

Теорема. Дисперсія дорівнює різниці математичного сподівання квадрата випадкової величини X та квадрата її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (4.13)$$

Одиниця вимірювання дисперсії $D(X)$ дорівнює квадрату одиниці вимірювання випадкової величини X .

Властивості дисперсії:

1. Дисперсія випадкової величини завжди невід'ємна: $D(X) \geq 0$.

2. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

3. Квадрат сталого множника можна винести за знак дисперсії:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. Дисперсія суми або різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Для оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення, крім дисперсії, використовують середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X)$ випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4.14)$$

Середнє квадратичне відхилення має ту ж розмірність, що й сама випадкова величина X .

Отже, зміст середнього квадратичного відхилення такий же, як у дисперсії, а розмірність – як у випадкової величини.

Приклад 4.4.

Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	1	2	3
p_i	0,4	0,5	0,1

Обчислити її числові характеристики.

Розв'язання.

За формулою (4.9) обчислюємо математичне сподівання $M(X)$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,1 = 1,7.$$

Дисперсію $D(X)$ знаходимо за формулою (4.13):

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для початку обчислимо математичне сподівання квадрата випадкової величини:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,1 = 3,3.$$

Тоді

$$D(X) = 3,3 - 1,7^2 = 0,41.$$

Середнє квадратичне відхилення згідно з формулою (4.14):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,41} \approx 0,64.$$

Приклад 4.5.

Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка задана щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2}{25}x, & 0 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Для заданої неперервної випадкової величини X математичне сподівання обчислюємо за формулою (4.11):

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot \frac{2}{25} x dx = \frac{2}{25} \int_0^5 x^2 dx = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{2}{75} (5^3 - 0) = \frac{10}{3}.$$

Дисперсію $D(X)$ обчислюємо за формулою (4.13):

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Оскільки $M(X^2) = \int_0^5 x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2}{25} x dx = \frac{2}{25} \int_0^5 x^3 dx =$

$$= \frac{2}{25} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^5 = \frac{1}{50} \cdot (5^4 - 0) = \frac{1}{50} \cdot 625 = \frac{25}{2},$$

тоді

$$D(X) = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{2} - \frac{100}{9} = \frac{225 - 200}{18} = \frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення згідно з формулою (4.14):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1,17.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають випадковою величиною?
2. Яке випадкове величине називають дискретною?
4. Як можна задати дискретний розподіл випадкової величини?
5. Як побудувати багатокутник розподілу випадкової величини?
6. Чому має дорівнювати сума всіх значень ймовірностей p_i дискретного розподілу випадкової величини?
7. Яку випадкову величину називають неперервною?
8. Яка функція називається інтегральною функцією розподілу випадкової величини?
9. Назвіть властивості інтегральної функції розподілу випадкової величини?
10. Що називають щільністю розподілу ймовірностей або диференціальною функцією розподілу випадкової величини?
11. Назвіть властивості диференціальної функції розподілу.
12. Які числові характеристики існують для дискретних випадкових величин та що характеризує кожна з них?
13. Що називають математичним сподіванням дискретної випадкової величини?
14. Вказати основні властивості математичного сподівання.
15. Що називають дисперсією дискретної випадкової величини?
16. Сформулюйте властивості дисперсії.
17. Що називають середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини?
18. Що називають математичним сподіванням неперервної випадкової величини?
19. Як обчислити дисперсією неперервної випадкової величини?
20. Як обчислити середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини?

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Закони розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

1. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини X :

X	-1	1	3	5	7
p_i	0,15	0,2	0,1	0,3	p_5

Обчислити ймовірність p_5 . Записати функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X . Визначити (за рядом розподілу і за функцією розподілу) ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень з інтервалу $(3;4)$.

2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	2	4	5
p	0,3	0,1	0,4	0,2

Побудувати багатокутник розподілу.

3. Задано ряд розподілу випадкової величини X :

x_i	-4	-1	2	5	8	10
p_i	a	$1,5a$	$0,5a$	$3,5a$	$2,5a$	a

Знайти значення a .

4. Через станцію проходять два потяги. Ймовірність затримки першого потяга дорівнює 0,05, другого – 0,1. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості затриманих потягів. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

5. Антена отримує три незалежних сигнали. Ймовірність затримки першого сигналу дорівнює 0,3, другого – 0,4, третього – 0,8. Випадкова величина X – число сигналів без запізнення. Побудувати ряд розподілу. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

6. За функцією розподілу дискретної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10, \\ 0,3, & 10 < x \leq 11, \\ 0,4, & 11 < x \leq 12, \\ 0,6, & 12 < x \leq 15, \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$

побудувати її ряд розподілу.

7. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(0; 1/3)$.

8. Неперервну випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти: а) коефіцієнт A ,

б) функцію розподілу $F(x)$,

в) ймовірність попадання величини X в проміжок $(0, \pi / 2)$.

9. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 1, & \text{при } x > e; \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірності $f(x)$.

10. Випадкову величину X задано щільністю ймовірності $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

11. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ A(x+1)^2, & -1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , та побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$.

12. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , $F(x)$ та ймовірність того, що задана випадкова величина потрапить в інтервал $(-0,25; 0,5)$.

Числові характеристики дискретної випадкової величини

13. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

а)

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

б)

x_i	-2	-1	0	4
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Знайти її числові характеристики.

14. Обчислити математичне сподівання випадкової величини $Z = X + 2Y$, якщо відомі математичні сподівання $M(X) = 5$ і $M(Y) = 3$.

15. Випадкові величини X і Y незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = 3X + 2Y$, якщо відомо, що $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$.

16. Дискретна випадкова величина x набуває три можливих значення: $x_1 = 4$ з ймовірністю $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ з ймовірністю $p_2 = 0,3$ і x_3 з ймовірністю p_3 . Скласти з вихідних величин закон розподілу. Знайти x_3 і p_3 , якщо відомо, що $M(X) = 8$.

17. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а також відомі математичні сподівання цієї величини і її квадрата: $M(X) = 2,3$, $M(X^2) = 5,9$. Знайти ймовірності, що відповідають можливим значенням X .

18. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

x_i	-0,1	x_2	0,2	0,4
p_i	0,3	0,1	p_3	p_4

Знайти x_2 , p_3 , p_4 , якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 0,13$ і дисперсія $D(X) = 0,0341$.

Числові характеристики неперервної випадкової величини

19. Неперервну випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2(x-2), & 2 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти її числові характеристики.

20. Неперервну випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ -6x^2 + 18x - 12, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Обчислити її математичне сподівання.

21. Знайти числові характеристики випадкової величини X , заданої функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

22. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ A\left(\frac{x}{2} + 1\right), & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Визначити параметр A . Знайти щільність ймовірності. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Закони розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

1. Троє студентів складають іспит із теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа студентів, які складуть іспит.

2. За функцією розподілу дискретної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,3, & 0 < x \leq 1, \\ 0,9, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

побудувати її ряд та багатокутник розподілу.

Закони розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

3. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , та побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$.

4. Випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ -\frac{1}{2}(x-1), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

Знайти функцію $F(x)$ розподілу випадкової величини X .

Числові характеристики дискретної випадкової величини

5. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

x_i	-1	3	x_3
p_i	0,1	p_2	0,5

і відоме її математичне сподівання $M(X) = 11,1$.

Знайти невідомі x_3 та p_2 , функцію розподілу $F(x)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Числові характеристики неперервної випадкової величини

6. Неперервну випадкову величину X задано функцією $F(x)$ розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 1, & \text{при } x > e; \end{cases}$$

а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) обчислити числові характеристики випадкової величини X ;

в) визначити ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(1, 2)$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

Закони розподілу ймовірностей випадкових величин

Завдання 1.

Неперервну випадкову величину X задано функцією $F(x)$ розподілу:

а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$;

в) визначити двома способами (за функціями $f(x)$ і $F(x)$) ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу (a, b) .

$$\text{1 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$\text{2 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + x)}{6}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$\text{3 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{9}, & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{4 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$\text{5 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^2}{25}, & \text{при } -2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 0, b = 2.$$

$$\text{6 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{(x+3)^2}{9}, & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad a = -2, b = -1.$$

$$\text{7 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{(x-3)^2}{4}, & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1, & \text{при } x > 5; \end{cases} \quad a = 3, b = 4.$$

$$\text{8 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(2x^2 + x)}{10}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{9 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$\text{10 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{25}, & \text{при } -1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4; \end{cases} \quad a = 1, b = 3.$$

$$\text{11 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^2}{16}, & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{12 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ (3x-3)^2, & \text{при } 1 < x \leq \frac{4}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{4}{3}; \end{cases} \quad a = 1, b = 1,5.$$

$$13 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 5, \\ \frac{(x-5)^2}{4}, & \text{при } 5 < x \leq 7, \\ 1, & \text{при } x > 7; \end{cases} \quad a = 5, b = 6.$$

$$14 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{(x-2)^2}{16}, & \text{при } 2 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при } x > 6; \end{cases} \quad a = 3, b = 5.$$

$$15 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{(x+3)^2}{25}, & \text{при } -3 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = -1, b = 1.$$

$$16 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 3x)}{18}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$17 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 2x)}{8}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$18 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ \frac{(x-4)^2}{16}, & \text{при } 4 < x \leq 8, \\ 1, & \text{при } x > 8; \end{cases} \quad a = 5, b = 7.$$

$$19 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 2x)}{15}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$20 - \text{варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ (2x-4)^2, & \text{при } 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{5}{2}; \end{cases} \quad a = 2, b = 2,2.$$

Завдання 2.

Випадкову величину X задано щільністю ймовірності $f(x)$. Знайти функцію $F(x)$ розподілу випадкової величини X .

$$\mathbf{1-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{5}{2}, \\ 4(2x-5), & \frac{5}{2} < x \leq 3, \\ 0, & x > 3; \end{cases}$$

$$\mathbf{2-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{2}{3}, \\ 6(3x-2), & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\mathbf{3-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 18(x-1), & 1 < x \leq \frac{4}{3}, \\ 0, & x > \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\mathbf{4-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$\mathbf{5-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 8(x-2), & 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 0, & x > \frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$\mathbf{6-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ 4(2x+1), & -\frac{1}{2} < x \leq 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{7-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$\mathbf{8-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\mathbf{9-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 2(x-3), & 3 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4; \end{cases}$$

$$\mathbf{10-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2x, & 2 < x \leq 6, \\ 0, & x > 6; \end{cases}$$

$$11\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 8(x-1), & 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & x > \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$12\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 16(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & x > \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$13\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{4}, \\ 8(4x-1), & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$14\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$15\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{6}{5}(x^2 + x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$16\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$17\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{3}{32}(4-x^2), & -2 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$18\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ -\frac{3}{4}(x^2-1), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$19\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{7}{12}(1-x^6), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$20\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 6(x-x^2), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

Закони розподілу ймовірностей та числові характеристики
випадкових величин

Завдання 3.

Дискретну випадкову величину X задано таблично і відоме її математичне сподівання $M(X)$. Знайти:

- 1) невідомі x_i та p_i .
- 2) функцію розподілу $F(x)$.
- 3) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1 – варіант

x_i	x_1	2	3
p_i	0,4	p_2	0,3

$$M(X) = 1,9.$$

2 – варіант

x_i	2	x_2	5
p_i	p_1	0,4	0,3

$$M(X) = 3,3.$$

3 – варіант

x_i	1	2	x_3
p_i	0,2	p_2	0,3

$$M(X) = 2,1.$$

4 – варіант

x_i	-1	x_2	3
p_i	0,4	0,1	p_3

$$M(X) = 1,2.$$

5 – варіант

x_i	-1	3	x_3
p_i	0,1	p_2	0,5

$$M(X) = 4,6.$$

6 - варіант

x_i	0	x_2	4
p_i	0,4	0,1	p_3

$$M(X) = 2,2.$$

7 - варіант

x_i	x_1	1	3
p_i	0,4	0,2	p_3

$$M(X) = 1.$$

8 - варіант

x_i	0	2	x_3
p_i	p_1	0,1	0,3

$$M(X) = 1,4.$$

9 – варіант

x_i	-2	x_2	2
p_i	0,2	0,3	p_3

$$M(X) = 0,6.$$

10 - варіант

x_i	-2	2	x_3
p_i	0,2	p_2	0,5

$$M(X) = 3,2.$$

11 - варіант

x_i	x_1	1	3
p_i	0,2	0,6	p_3

$$M(X) = 1.$$

12 - варіант

x_i	x_1	2	4
p_i	0,5	p_2	0,2

$$M(X) = 1,4.$$

13 - варіант

x_i	1	3	x_3
p_i	0,1	p_2	0,4

$$M(X) = 3,6.$$

14 - варіант

x_i	-1	x_2	1
p_i	0,2	0,2	p_3

$$M(X) = 0,4.$$

15 - варіант

x_i	-2	1	x_3
p_i	0,1	p_2	0,5

$$M(X) = 2,2.$$

16 - варіант

x_i	1	x_2	3
p_i	0,4	0,2	p_3

$$M(X) = 2.$$

17 - варіант

x_i	x_1	1	2
p_i	0,2	0,3	p_3

$$M(X) = 1,3.$$

18- варіант

x_i	-2	x_2	2
p_i	0,1	0,3	p_3

$$M(X) = 1.$$

19 - варіант

x_i	2	x_2	4
p_i	p_1	0,3	0,2

$$M(X) = 2,7.$$

20 – варіант

x_i	0	2	x_3
p_i	0,5	p_2	0,2

$$M(X) = 1,4.$$

Розділ 5. СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ ВИБІРКИ

5.1 Основні задачі математичної статистики

Із теорією ймовірностей тісно пов'язаний розділ математики – **математична статистика**.

Статистика (від італійського слова *stato* – держава) вивчає кількісний бік суспільних явищ і процесів у нерозривному зв'язку з їх якісним змістом.

Статистику поділяють на описову та пояснювальну. Прикладом описової статистики є книга рекордів Гіннеса. Пояснювальна статистика формулює певні висновки про ті чи інші явища, робить прогноз.

Математичною статистикою називається наука, яка займається розробкою методів відбору, опису та аналізу досліdnих даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ. У свою чергу, встановлення цих закономірностей ґрунтується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних – результатів дослідів або спостережень.

Основним змістом математичної статистики є систематизація, обробка і використання статистичної інформації для виявлення статистичних закономірностей ознаки або ознак певної сукупності елементів.

Задачі математичної статистики:

- 1) вказати способи збору та групування (якщо даних дуже багато) статистичної інформації;
- 2) визначити закон розподілу випадкової величини або системи випадкових величин за статистичними даними;
- 3) оцінити невідомі параметри розподілу;
- 4) перевірити правдоподібність припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення оцінюваного параметра.

Основне завдання математичної статистики – розроблення методів аналізу статистичних даних залежно від мети дослідження, які дають змогу за результатами випробувань робити певні ймовірнісні висновки.

Сучасну математичну статистику, що базується на методах теорії ймовірностей, називають **наукою про прийняття рішень в умовах невизначеності**.

Методи математичної статистики ефективно використовують під час розв'язування багатьох наукових задач, задач щодо організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

Математична статистика виникла (XVII ст.) та почала розвиватись паралельно з теорією ймовірностей. Подальшим розвитком (кінець XIX – початок XX ст.) математична статистика зобов'язана П. Л. Чебишову, А. А. Маркову, О. М. Ляпунову, К. Гауссу, Ф. Гальтону, К. Пірсону та ін.

У XX ст. найбільший внесок у математичну статистику зробили В. І. Романовський, Е. Е. Слуцький, А. Н. Колмогоров, Стюдент (псевдонім В. Госсета), Е. Пірсон, Ю. Нейман, А. Вальд, А. В. Скороход.

5.2 Генеральна та вибіркова сукупності

Кожен об'єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Розглядаючи лише одну ознаку кожного об'єкта, припускають, що інші ознаки несуттєві, тобто множина об'єктів однорідна. Наприклад, розглядаючи роботу спеціаліста, можна досліджувати його завантаженість, тип клієнтів, швидкість обслуговування тощо. Кожна така ознака утворює випадкову величину, спостереження над якою проводяться.

Множину однорідних об'єктів називають **статистичною сукупністю**.

Основними поняттями математичної статистики є: генеральна сукупність, вибірка та обсяг сукупності.

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називають сукупність випадково взятих об'єктів із статистичної сукупності.

Генеральною називають сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку. **Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної)** називають кількість об'єктів цієї сукупності.

Приклад 5.1.

Плоди дерева (200 шт.) обстежують на наявність специфічного смаку цього сорту. Для цього відбирають 10 штук. Записати обсяг генеральної сукупності та обсяг вибірки.

Розв'язання:

Тут 200 – обсяг генеральної сукупності, 10 – обсяг вибірки.

Вибірка повинна бути репрезентативною (представницькою), тобто правильно відображати ті властивості генеральної сукупності, які вивчаються. Досліджувані явища мають бути масовими. Лише тоді статистичні дані будуть достовірними.

Вибірки бувають повторні та безповторні.

Повторною називають вибірку, за якої відібраний об'єкт повертається до генеральної сукупності перед відбором іншого об'єкта. Вибірку називають **безповторною**, якщо взятий об'єкт до генеральної сукупності не повертається. Найчастіше використовують безповторні вибірки.

План проведення статистичних досліджень:

- 1) формулюють завдання дослідження та визначають обсяг вибірки (мета, об'єкти вивчення, їх кількість, певні ознаки, характеристики);
- 2) збирають потрібні дані, вибирають доцільну форму їх подання для подальшого дослідження (водночас застосовують такі методи, як спостереження, порівняння, усне та письмове анкетування);
- 3) проводять остаточну обробку статистичного матеріалу та його вивчення;
- 4) за результатами формулюють певні висновки.

Компактною та наочною формою подання даних, отриманих у результаті статистичного дослідження, є: таблиці, графіки, стовпчасті та кругові діаграми.

5.3 Статистичний ряд та його графічне представлення

Статистичні об'єкти досліджують за їх певними характеристиками або ознаками, які називають **варіантами**.

Сукупність варіант, записаних у порядку їх зростання, називають **варіаційним рядом**.

Важлива характеристика – частота появи цієї варіанти.

Нехай з генеральної сукупності зроблено вибірку об'ємом n . Значення x_1 у вибірці повторюється n_1 раз, значення x_2 – n_2 раз, ..., значення x_k – n_k раз. При цьому об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad (5.1)$$

Додатні числа n_i , які показують, скільки разів варіанта x_i трапляється в таблиці даних, називають **частотою появи варіанти** x_i , а відношення частоти n_i варіанти x_i до об'єму вибірки n – **відносними частотами (частостями)**, тобто:

$$w_i = \frac{n_i}{n}. \quad (5.2)$$

Причому сума усіх відносних частот:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (5.3)$$

Статистичним рядом називають перелік варіант і відповідних їм частот або частостей. Записують статистичний ряд у вигляді таблиці. Залежність між упорядкованим рядом варіант і відповідними їм відносними частотами називають **статистичним рядом відносних частот вибірки**.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

– статистичний ряд частот.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
w_i	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

– статистичний ряд відносних частот.

Даний статистичний ряд ще називають дискретним статистичним рядом.

Приклад 5.2.

Під час дослідження кількісної ознаки із генеральної сукупності X було отримано вибірку:

4; 3; 6; 4; 7; 2; 5; 1; 2; 5; 4; 4; 3; 5; 6; 3; 4; 1; 3; 4.

Знайти обсяг вибірки, побудувати її варіаційний ряд, статистичні ряди частот та відносних частот.

Розв'язання:

Оскільки вибірка містить 20 значень, то об'єм вибірки за формулою (5.1) складає $n = 20$.

Побудуємо варіаційний ряд вибірки, тобто запишемо всі її значення у порядку зростання:

1; 1; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 6; 6; 7.

У цій вибірці лише сім різних значень, тобто варіант:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

Знайдемо їх частоти:

$$n_1 = 2; \quad n_2 = 2; \quad n_3 = 4; \quad n_4 = 6; \quad n_5 = 3; \quad n_6 = 2; \quad n_7 = 1.$$

Запишемо шуканий статистичний розподіл частот вибірки:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	2	4	6	3	2	1

Знайдемо відносні частоти варіант вибірки за формулою (5.2):

$$w_1 = \frac{2}{20} = 0,1; \quad w_2 = \frac{2}{20} = 0,1; \quad w_3 = \frac{4}{20} = 0,2; \quad w_4 = \frac{6}{20} = 0,3;$$

$$w_5 = \frac{3}{20} = 0,15; \quad w_6 = \frac{2}{20} = 0,1; \quad w_7 = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Отже, шуканий статистичний ряд відносних частот має вигляд:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
w_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,15	0,1	0,05

За формулою (5.3) контроль:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,15 + 0,1 + 0,05 = 1.$$

Статистичний ряд можна зобразити графічно у вигляді *полігона* (многокутника), відкладаючи по осі абсцис елементи статистичного ряду, а по осі ординат – частоти або частоти. Отримані точки площини з'єднують відрізками.

У випадку, коли вибірка отримана із неперервної генеральної сукупності і об'єм її великий, складають *інтервальний статистичний ряд*. В його перший рядок вписують частинні проміжки $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{k-1}, x_k)$, які беруться однакової довжини $h = x_{i+1} - x_i$. У другому рядку зазначають частоти n_i попадання елементів вибірки в розглядувані проміжки.

Для визначення кількості проміжків k використовують напівемпіричну формулу:

$$k = 1,72n^{1/3}. \quad (5.4)$$

Отже, при $n=40 \Rightarrow k=6$;
 $n=100 \Rightarrow k=8$;
 $n=200 \Rightarrow k=10$ і т.д.

Також застосовують формулу Старджеса:

$$k = 1 + \log_2 n. \quad (5.5)$$

Довжину проміжків знаходять за формулою:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \quad (5.6)$$

де $x_{\min}, x_{\max}$ – найменша та найбільша варіанта відповідно. За початок першого інтервалу рекомендується обирати величину:

$$x_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}. \quad (5.7)$$

Інтервальний статистичний ряд можна графічно зобразити у вигляді гістограми.

Гістограмою частот (частостей) називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h , а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ – щільності частоти ($\frac{w_i}{h}$ – щільності частоти).

Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки, а площа гістограми частостей дорівнює одиниці.

Якщо з'єднати середини верхніх основ прямокутників відрізками прямої, то отримаємо полігон того ж розподілу.

Приклад 5.3.

Задано вибірку неперервної випадкової величини:

44; 22,6; 24,8; 29,4; 40,8; 21,1; 26,6; 32,4; 33,1; 25,7;
37,1; 31,4; 32,4; 38,2; 45; 42,8; 39,3; 28,8; 20; 30,5.

Скласти інтервальний статистичний ряд, розбивши весь діапазон на інтервали.

Розв'язання:

Об'єм вибірки $n = 20$.

За формулою (5.6) знаходимо довжину інтервалів:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Для визначення кількості проміжків k використаємо напівемпіричну формулу (5.4):

$$k = 1,72n^{1/3}.$$

Отже,

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1,72n^{1/3}} = \frac{45 - 20}{1,72 \cdot \sqrt[3]{20}} \approx 5,36$$

Прийmemo $h = 5$.

Складемо інтервальний статистичний ряд

інтервали	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
x_i^*	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5
n_i	4	4	5	3	4
$w_i = \frac{n_i}{n}$	0,2	0,2	0,25	0,15	0,2

Тут x_i^* – середина i -того інтервалу, n_i – кількість варіант, що потрапили в i -ий інтервал.

5.4 Емпірична функція розподілу та її властивості

За даними статистичного розподілу вибірки будують емпіричну функцію розподілу.

Емпіричною функцією розподілу (або функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$.

Математичне обчислення емпіричної функції розподілу записують у вигляді:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \quad (5.8)$$

де n – об'єм вибірки, n_x – кількість варіант, менших за x .

Оскільки відносна частота події наближається до ймовірності цієї події при збільшенні n , то вибіркова функція розподілу $F^*(x)$ наближено представляє функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності, тобто є її оцінкою:

$$F^*(x) \approx F(x).$$

Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ має такі властивості:

1. $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
2. $F^*(x)$ – зростаюча функція;
3. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ 1, & x > x_k, \end{cases}$

де x_1 – найменше значення варіанти, x_k – найбільше значення варіанти.

Приклад 5.4.

За заданим статистичним розподілом вибірки:

x_i	3	5	7	10	15
n_i	2	4	7	4	3

скласти емпіричну функцію розподілу.

Розв'язання:

За формулою (5.1) маємо об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 2 + 4 + 7 + 4 + 3 = 20.$$

Оскільки найменше значення варіанти $x_1 = 3$, то

$$F^*(x) = 0$$

для всіх $x \leq 3$.

Значення $x < 5$, а саме $x_1 = 3$, спостерігається двічі, тому згідно формули (5.8), маємо:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{2}{20} = 0,1$$

при $3 < x \leq 5$.

Аналогічно значення $x < 7$, а саме $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ спостерігалися $2+4=6$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{6}{20} = 0,3$$

при $5 < x \leq 7$.

Значення $x < 10$, а саме $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ спостерігалися $2+4+7=13$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{13}{20} = 0,65$$

при $7 < x \leq 10$.

Значення $x < 15$, а саме $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10$ спостерігалися $2+4+7+4=17$ разів, тому:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{17}{20} = 0,85$$

при $10 < x \leq 15$.

Оскільки $x_5 = 15$ – найбільше значення варіанти, то

$$F^*(x) = 1$$

при $x > 15$.

Таким чином, шукана емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3; \\ 0,1 & \text{при } 3 < x \leq 5; \\ 0,3 & \text{при } 5 < x \leq 7; \\ 0,65 & \text{при } 7 < x \leq 10; \\ 0,85 & \text{при } 10 < x \leq 15; \\ 1 & \text{при } x > 15. \end{cases}$$

5.5 Числові характеристики вибірки

Як доповнення до табличних та графічних методів представлення даних ще одним важливим засобом обробки даних є обчислення їх числових характеристик. Найважливіші з них: **вибіркове середнє, дисперсія, середньоквадратичне відхилення**.

Ці характеристики можуть бути обчислені за даними, що знаходяться у вибірці, або за даними, що входять у кінцеву генеральну сукупність.

Числові характеристики, обчислені за вибіркою або ті, що використовуються для опису даних вибірки, називають **статистиками**.

Вибірковим середнім $\bar{x}$ називають суму всіх значень вибірки, поділену на обсяг вибірки n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (5.9)$$

Вибіркове середнє дискретного статистичного ряду знаходять за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i. \quad (5.10)$$

Вибіркове середнє інтервального статистичного ряду вираховують за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* n_i, \quad (5.11)$$

де $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ – середина інтервалу $[x_i; x_{i+1})$.

Вибіркове середнє є аналогом математичного сподівання і використовується дуже часто. Воно може набувати різних числових значень при різних вибірках однакового об'єму.

Вибірковою дисперсією D^* називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень вибірки від вибіркового середнього $\bar{x}$:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (5.12)$$

Обчислення вибіркової дисперсії спрощується, якщо її знаходити за формулою:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x})^2. \quad (5.13)$$

Вибіркову дисперсію інтервального статистичного ряду вираховують на основі формули:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^{*2} n_i - (\bar{x})^2. \quad (5.14)$$

Вибірковим середньоквадратичним відхиленням вибірки називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії:

$$\sigma^* = \sqrt{D^*}. \quad (5.15)$$

При розв'язуванні практичних задач часто використовують **виправлену дисперсію (варіансу)**, яку обчислюють наступним чином:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^*. \quad (5.16)$$

Величину:

$$S = \sqrt{S^2} \quad (5.17)$$

називають **виправленим середнім квадратичним відхиленням** вибірки або **стандартом**.

Приклад 5.5.

Обчислити вибіркове середнє, вибіркору дисперсію, вибіркору середньоквадратичне відхилення, варіансу і стандарт вибірки, заданої статистичним розподілом частот:

x_i	-1	2	5	8	10
n_i	5	10	20	5	10

Розв'язання:

За формулою (5.1) маємо об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 5 + 10 + 20 + 5 + 10 = 50.$$

На основі формули (5.10) обчислюємо вибіркове середнє:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i = \frac{1}{50} (-1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 10) = \frac{255}{50} = 5,1.$$

Вибіркову дисперсію знаходимо за формулою (5.13):

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x})^2 = \frac{1}{50} (1 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 25 \cdot 20 + 64 \cdot 5 + 100 \cdot 10) - 5,1^2 = \frac{1865}{50} - 26,01 = 11,29.$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення вибірки на основі формули (5.15) у нашому випадку складає:

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{11,29} \approx 3,36.$$

Виправлену дисперсію (варіансу) обчислюємо за формулою (5.16):

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{50}{49} \cdot 11,29 = 11,52.$$

Тоді стандарт або виправлене середнє квадратичне відхилення вибірки дорівнює згідно з формулою (5.17):

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{11,52} \approx 3,39.$$

Приклад 5.6.

Обчислити вибіркове середнє, вибірккову дисперсію, вибірккове середньоквадратичне відхилення, варіансу і стандарт вибірки, заданої інтервальним розподілом частот:

інтервали	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
n_i	2	8	35	40	15

Розв'язання:

За формулою (5.1) маємо об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 2 + 8 + 35 + 40 + 15 = 100.$$

Перетворимо заданий інтервальний статистичний розподіл вибірки на точковий, знайшовши середини частинних інтервалів:

$$x_1^* = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3;$$

$$x_3^* = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{6 + 8}{2} = 7;$$

$$x_2^* = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5;$$

$$x_4^* = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{8 + 10}{2} = 9;$$

$$x_5^* = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{10 + 12}{2} = 11.$$

Вибіркове середнє інтервального статистичного ряду вираховуємо за формулою (5.11):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* n_i = \frac{1}{100} (3 \cdot 2 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 35 + 9 \cdot 40 + 11 \cdot 15) = \frac{816}{100} = 8,16.$$

Вибіркову дисперсію знаходимо на основі формули (5.14):

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^{*2} n_i - (\bar{x})^2 = \frac{1}{100} (9 \cdot 2 + 25 \cdot 8 + 49 \cdot 35 + 81 \cdot 40 + 121 \cdot 15) - 8,16^2 = 3,29.$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення вибірки на основі формули (5.15) у нашому випадку складає:

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{3,29} \approx 1,81.$$

Виправлену дисперсію (варіансу) обчислюємо за формулою (5.16):

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{100}{99} \cdot 3,29 = 3,32.$$

Тоді стандарт або виправлене середнє квадратичне відхилення вибірки дорівнює згідно з формулою (5.17):

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3,32} \approx 1,82.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку науку називають математичною статистикою?
2. Вказати основні задачі математичної статистики.
3. Що називають генеральною та вибірковою сукупністю, об'ємом цих сукупностей?
4. Навести приклади генеральної сукупності та вибірки.
5. Вказати основні типи вибірок.
6. Що називається варіантою, варіаційним рядом?
7. Що таке частота, відносна частота варіант?
8. Що називають емпіричною функцією розподілу?
9. Властивості емпіричної функція розподілу.
10. Статистичний розподіл частот вибірки.
11. Статистичний розподіл відносних частот вибірки.
12. Що відноситься до числових характеристики вибірки?
13. Які числові характеристики називаються статистичними?
14. Як визначається вибірка середня для статистичного розподілу вибірки?
15. Як визначається середньоквадратичне відхилення вибірки?
16. Що таке варіанса та стандарт, як їх обчислити?

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

1. Для заданої вибірки із генеральної сукупності знайти обсяг вибірки, побудувати її варіаційний ряд, статистичні ряди частот та відносних частот.

а) 7, 4, 4, 8, 12, 12, 12, 7, 8, 12, 8, 12, 4, 12, 12, 4, 12, 4, 12, 12, 6, 9, 5, 3, 6, 6, 9, 3, 5, 6, 9, 5, 6, 6, 9, 6, 9, 6, 6, 6, 6.

б) 4; 4,3; 5,68; 6,2; 5,64; 5,8; 4,25; 5,4; 5,3; 5,2; 4,55; 5,32; 6; 6,15; 4,56; 6,64; 6,5; 4,7; 6,8; 6,15; 5,6; 5,1; 4,2; 4,8; 6,9; 7; 4,9; 5; 5,25; 6,2.

2. Знайти та побудувати емпіричну функцію розподілу по заданій вибірці:

$x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $x_3 = 10$; $n_1 = 12$; $n_2 = 18$; $n_3 = 30$.

3. П'ятдесят абітурієнтів на вступних іспитах з математики отримали таку кількість балів:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12, 20, 17, 15, 13, 17, 16, 20, 14, 14, 13, 17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14, 16, 15, 15, 18, 15, 15, 19, 14, 16, 18, 18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17.

Побудувати дискретний статистичний розподіл частот та відносних частот. Знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

4. Задано вибірку неперервної випадкової величини:

44,1; 22,6; 24,8; 29,4; 40,8; 21,1; 26,6; 32,4; 33,1; 25,7; 37,1; 31,4; 32,4; 38,2; 44,5; 42,8; 39,3; 28,8; 20,5; 30,5.

а) Скласти інтервальний статистичний ряд, розбивши весь діапазон на інтервали і побудувати гістограму;

б) знайти емпіричну функцію розподілу.

5. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 32$. Здобуто такі реалізації випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму.

6. В таблиці наведені значення добової температури у червні в м. Києві

число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
температура	20	23	21	26	27	24	25	28	30	27	24
число	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
температура	25	25	27	24	22	25	24	26	24	22	25
число	23	24	25	26	27	28	29	30			
температура	24	24	23	20	19	21	20	22			

Скласти інтервальный статистичний ряд, розбивши весь діапазон на інтервали, побудувати гістограму і полігон відносних частот; знайти емпіричну функцію розподілу; обчислити числові характеристики вибірки.

7. Побудувати емпіричну функцію розподілу, гістограму та полігон частот вибірки, поданої у вигляді таблиці частот:

інтервали	[0,2; 2,2)	[2,2; 4,2)	[4,2; 6,2)	[6,2; 8,2)	[8,2; 10,2)
n_i	70	20	4	3	3

Обчислити числові характеристики вибірки.

8. Відсоток виконання плану підприємства за рік та кількість підприємств, що виконують цей план, наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу:

$x_i, \%$ $h=10\%$	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
n_i	2	6	13	16	25	12	10	8	5	3	1

Побудувати гістограму частот і емпіричну функцію розподілу. Обчислити числові характеристики вибірки.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Кожну годину вимірювалась напруга в електромережі. Результати вимірювання напруги у вольтах наведені у вигляді статистичного ряду:

222, 219, 224, 220, 218, 217, 221, 220, 215, 218, 223, 225,
220, 226, 221, 216, 211, 219, 220, 221, 222, 218, 221, 219.

Побудувати дискретний статистичний розподіл частот та відносних частот. Знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік. Обчислити числові характеристики вибірки.

2. На телефонній станції проводиться спостереження за кількістю неправильних з'єднань за хвилину. Результати спостережень протягом години представлені в таблиці:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	8	17	16	10	6	2	1

Обчислити числові характеристики вибірки.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5

Завдання 1.

Обчислити вибіркове середнє, вибірккову дисперсію, вибірккове середньоквадратичне відхилення, варіансу і стандарт вибірки, заданої статистичним розподілом частот:

1-В	x_i	-1	1	2	3	4	5
	n_i	3	8	20	16	7	2

2-В	x_i	-2	-1	0	1	2	3
	n_i	2	8	20	9	8	3

3-В	x_i	1	2	3	4	5	6
	n_i	5	8	15	12	7	3

4-В	x_i	-2	-1	0	1	2	3
	n_i	3	12	20	8	5	2

5-В	x_i	-3	-2	-1	0	1	2
	n_i	2	6	25	10	5	2

6-В	x_i	-4	-3	-1	0	2	3
	n_i	1	7	23	10	7	2

7-В	x_i	-1	0	1	3	4	5
	n_i	3	9	18	10	8	2

8-В	x_i	-2	-1	2	3	4	5
	n_i	5	10	15	8	7	5

9-В	x_i	-3	-2	-1	1	2	3
	n_i	1	7	25	10	5	2

10-В	x_i	0	1	2	3	4	6
	n_i	2	7	20	10	8	3

11-В	x_i	-2	0	1	2	3	4
	n_i	2	7	19	15	6	1

12-В	x_i	-3	-2	-1	0	1	2
	n_i	1	7	19	8	7	2

13-В	x_i	0	1	2	3	4	5
	n_i	4	7	14	11	6	2

14-В	x_i	-3	-2	-1	0	1	2
	n_i	2	11	19	7	4	1

15-В	x_i	-4	-3	-2	-1	0	1
	n_i	1	5	24	9	4	1

16-В	x_i	-5	-4	-2	-1	1	2
	n_i	0	6	22	9	6	1

17-В	x_i	-2	-1	0	2	3	4
	n_i	2	8	17	9	7	1

18-В	x_i	-3	-2	1	2	3	4
	n_i	4	9	14	7	6	4

19-В	x_i	-4	-3	-2	0	1	2
	n_i	0	6	24	9	4	1

20-В	x_i	-1	0	1	2	3	5
	n_i	1	6	19	9	7	2

Завдання 2.

У відділі технічного контролю було виміряно $n = 200$ втулок з партії, виготовленої одним автоматичним верстатом. У таблиці дано відхилення діаметрів від номіналу (у мікронах) після групування. Обчислити вибіркове середнє, вибірккову дисперсію, вибірккове середньоквадратичне відхилення, варіансу і стандарт вибірки, заданої інтервальним розподілом частот:

Межі відхилення		[-20,-15)	[-15,-10)	[-10,-5)	[-5,0)	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)
1-варіант	n_i	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3
2-варіант	n_i	6	12	15	23	50	42	25	18	6	3
3-варіант	n_i	7	10	16	25	48	43	24	19	5	3
4-варіант	n_i	5	12	16	24	49	43	25	16	8	2
5-варіант	n_i	4	12	16	23	48	42	26	17	8	4
6-варіант	n_i	5	11	16	25	49	42	25	17	7	3
7-варіант	n_i	5	12	16	24	50	41	27	16	7	2
8-варіант	n_i	7	12	14	24	49	40	27	17	7	3
9-варіант	n_i	7	10	15	25	49	41	26	17	7	3
10-варіант	n_i	5	12	16	24	49	41	26	17	7	3
11-варіант	n_i	4	11	16	25	50	41	26	17	7	3
12-варіант	n_i	6	11	16	24	49	41	27	16	7	3
13-варіант	n_i	6	11	16	24	49	42	26	16	8	2
14-варіант	n_i	5	12	15	25	49	42	26	16	8	2
15-варіант	n_i	4	11	16	23	50	43	25	16	7	3
16-варіант	n_i	3	10	16	25	50	44	26	17	6	3
17-варіант	n_i	5	10	15	25	50	45	25	15	6	4
18-варіант	n_i	4	11	15	24	51	44	26	15	7	3
19-варіант	n_i	6	11	15	25	52	42	26	15	5	3
20-варіант	n_i	6	12	16	25	50	42	26	15	5	3

Розділ 6. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

6.1 Поняття статистичних оцінок

Оцінка параметра (статистична оцінка) – це випадкова величина, розрахована за вибіркою, яка дає підстави для прийняття обґрунтованих рішень щодо невідомого параметра генеральної сукупності.

Головне завдання математичної статистики в тому, щоб на підставі результатів випадкової вибірки якомога точніше оцінити значення параметрів генерального розподілу. Окреме спостереження здебільшого належить деякій гіпотетично необмеженій генеральній сукупності, що організована відповідно до певного закону, який називають **розподілом сукупності**. Кожне спостереження дає додаткову інформацію про параметри та вигляд розподілу. Зазвичай за вибіркою розраховують наближені значення (**оцінки**) таких параметрів розподілу, як математичне сподівання та дисперсія.

Задачі оцінювання можна розбити на дві великі групи: **параметричні** і **непараметричні**. Якщо відомий вигляд розподілу й область зміни параметрів, то маємо параметричну задачу. Якщо ж невідомий навіть закон розподілу, не кажучи вже про можливі значення параметрів, то задача непараметрична.

Задачі параметричного оцінювання поділяють на два типи: **відшукування точкових оцінок** і **відшукування інтервальних оцінок**. У першому випадку слід знайти, яке саме значення, розраховане за вибіркою, треба взяти за наближене значення істинної характеристики генеральної сукупності, а в другому – вказати інтервал, який із заданою ймовірністю містить це істинне значення.

6.2 Точкові оцінки параметрів розподілу та властивості їх якості

Нехай вивчається випадкова величина X із законом розподілу, що залежить від одного чи кількох параметрів. Потрібно по вибірці, отриманій в результаті n спостережень, оцінити невідомий параметр θ .

Точковою статистичною оцінкою невідомої генеральної числової характеристики або параметра θ розподілу називають функцію $\tilde{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що залежить від елементів вибірки, і наближено рівна істинному значенню цього параметра θ :

$$\tilde{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \theta,$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – результати n спостережень над кількісною ознакою випадкової величини X .

Для кожної конкретної вибірки це число, тобто точка на числовій осі. Наприклад, вибіркове середнє, вибіркова дисперсія та вибіркове середньоквадратичне відхилення – точкові оцінки відповідних числових характеристик генеральної сукупності.

Точкові оцінки параметрів розподілу є випадковими величинами, їх можна вважати первинними результатами обробки вибірки тому, що невідомо, з якою точністю кожна з них оцінює відповідну числову характеристику генеральної сукупності.

Якщо об'єм вибірки доволі великий, то точкові оцінки задовольняють практичні потреби точності. Щоб статистичні оцінки давали найкращі наближення, вони повинні задовольняти певним якісним вимогам.

Основними статистичними властивостями, які описують якість оцінки числового параметра, є **незміщеність** (незсуненість), **ефективність** і **спроможність** (обґрунтованість, значущість, конзистентність). Дві перші властивості можуть справджуватися для скінченної вибірки, остання – лише за умови необмеженого збільшення обсягу вибірки.

Незміщеною називають точкову оцінку $\tilde{\theta}_n$, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру θ для будь-якого обсягу вибірки:

$$M(\tilde{\theta}) = \theta.$$

Якщо ж :

$$M(\tilde{\theta}) \neq \theta,$$

то оцінку $\tilde{\theta}_n$ називають **зміщеною**. У цьому випадку:

$$M(\tilde{\theta}) - \theta = M(\tilde{\theta} - \theta) = \delta \neq 0,$$

де величина δ – зміщення (зсув).

Вимога незміщеності особливо важлива при малій кількості спостережень. Але не завжди незміщена оцінка $\tilde{\theta}_n$ найближча до θ . Можливі значення $\tilde{\theta}_n$ можуть мати велике розсіювання. Тому від оцінки вимагається ще й властивість ефективності.

Ефективною називають таку оцінку $\tilde{\theta}_n$, яка при заданому об'ємі n має найменшу можливу дисперсію серед усіх можливих незміщених оцінок параметра θ .

Оцінку $\tilde{\theta}_n$ параметра θ називають **спроможною**, якщо вона збігається за ймовірністю до оцінюваного параметру :

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta,$$

тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$. Це означає, що із збільшенням об'єму вибірки оцінка $\tilde{\theta}_n$ наближається до істинного значення параметра θ .

6.3 Точкове оцінювання математичного сподівання й дисперсії

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вибірка з генеральної сукупності і $M(X) = m$.

Незміщеність є наслідком того, що вибіркове середнє є незміщеною оцінкою для математичного сподівання випадкової величини, розподіл якої має генеральна сукупність:

$$\tilde{m} = \bar{x}. \quad (6.1)$$

Вибіркова дисперсія D^* є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії $D(X)$.

Незміщеною і спроможною оцінкою дисперсії $D(X)$ є виправлена дисперсія S^2 :

$$\tilde{D} = S^2 = \frac{n}{n-1} D^*. \quad (6.2)$$

Поправку $\frac{n}{n-1}$ називають **поправкою Бесселя**.

На практиці виправленою дисперсією користуються, якщо $n \leq 30$, при $n > 30$ за незміщену оцінку дисперсії можна наближено прийняти вибірккову дисперсію.

Для спрощення обчислень вибіркового середнього та вибіркової дисперсії інтервального статистичного ряду використовуються формули:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{x_i^* - C}{h} n_i}{n} \cdot h + C \quad (6.3)$$

та

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i^* - C}{h} \right)^2 n_i}{n} \cdot h^2 - (\bar{x} - C)^2, \quad (6.4)$$

де h – довжина інтервалів, C – довільне число.

Приклад 6.1.

Для контролю автомату, який розливає гальмівну рідину, було відібрано $n=50$ пляшок. Результати перевірки вмісту рідини в *мл* наведені в таблиці.

$X, \text{мл}$	190-194	194-198	198-202	202-206	206-210
n_i	6	10	14	16	4

Вважаючи, що випадкова величина X – вміст гальмівної рідини в пляшці, розподілена за нормальним законом, потрібно обчислити точкові незміщені статистичні оцінки для $M(X)$, $D(X)$.

Розв’язання.

Для зручності обчислень побудуємо наступну таблицю:

x_i^* – середини інтервалів	192	196	200	204	208	сума
n_i	6	10	14	16	4	50
$\frac{x_i^* - C}{h}$	-2	-1	0	1	2	-
$\left(\frac{x_i^* - C}{h}\right) n_i$	-12	-10	0	16	8	2
$\left(\frac{x_i^* - C}{h}\right)^2$	4	1	0	1	4	-
$\left(\frac{x_i^* - C}{h}\right)^2 n_i$	24	10	0	16	16	66

Тут $h = 4$ – довжина інтервалів, C – довільне число. Візьмемо, наприклад, $C=200$.

Середнє вибіркве обчислюємо за формулою (6.3):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{x_i^* - C}{h} n_i}{n} \cdot h + C = \frac{2}{50} \cdot 4 + 200 = 200,16.$$

Вибіркову дисперсію знаходимо на основі формули (6.4):

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i^* - C}{h}\right)^2 n_i}{n} \cdot h^2 - (\bar{x} - C)^2 = \frac{66}{50} \cdot 16 - (200,16 - 200)^2 = 21,0944.$$

Згідно з (6.2) незміщеною оцінкою дисперсії $D(X)$ є виправлена дисперсія S^2 :

$$\tilde{D} = S^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{50}{49} \cdot 21,0944 = 21,52,$$

а згідно з (6.1) вибіркве середнє є незміщеною оцінкою для математичного сподівання $M(X)$:

$$\tilde{m} = \bar{x} = 200,16.$$

6.4 Поняття інтервальних оцінок

Якщо об'єм вибірки малий, то точкові оцінки можуть давати значні похибки, а оскільки питання точності оцінок у цьому випадку дуже важливе, то використовують інтервальні оцінки.

Інтервальною називають статистичну оцінку, що визначається двома числами, кінцями інтервалів.

Інтервальні методи оцінювання дають змогу знайти інтервал, який з певною ймовірністю містить невідоме значення параметра.

Нехай знайдена за даними вибірки статистична оцінка $\tilde{\theta}$ буде оцінкою невідомого параметра θ . Різницю між статистичною оцінкою $\tilde{\theta}$ та її оцінювальним параметром θ , взяту за абсолютним значенням, називають **точністю оцінки**, а саме:

$$|\tilde{\theta} - \theta| < \delta, \quad (6.5)$$

де δ – точність оцінки.

Оскільки $\tilde{\theta}$ є випадковою величиною, то і δ буде випадковою, тому нерівність (6.5) справджуватиметься з певною ймовірністю.

Ймовірність, з якою береться нерівність (6.5), тобто:

$$P(|\tilde{\theta} - \theta| < \delta) = \gamma, \quad (6.6)$$

називають **надійністю оцінки (надійною ймовірністю)**.

Рівність (6.6) можна записати так:

$$P(\tilde{\theta} - \delta < \theta < \tilde{\theta} + \delta) = \gamma. \quad (6.7)$$

Величина γ вибирається наперед, в основному γ приймають рівною 0,9; 0,95; 0,99 тощо, залежно від обставин.

Інтервал $[\tilde{\theta} - \delta; \tilde{\theta} + \delta]$, що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності з заданою надійністю γ , називають **довірчим**. Цей інтервал випадковий, бо його межі залежать від випадкової величини $\tilde{\theta}$.

Збільшення довірчої ймовірності веде до зниження точності оцінки параметра, тобто до збільшення довірчого інтервалу. Отже, що точніша оцінка, то менший рівень її надійності, і навпаки, для збільшення надійності потрібно збільшувати довірчий інтервал, тобто знижувати точність оцінки.

Величину

$$\alpha = 1 - \gamma \quad (6.8)$$

називають **рівнем значущості**. Це ймовірність, за якої подія в конкретних умовах вважається “практично неможливою”.

6.5 Інтервальні оцінки параметрів нормально розподіленої генеральної сукупності

Нехай задано генеральну сукупність з нормальним розподілом $X \in N(m, \sigma)$, де σ відоме, надійність γ задана.

Довірчий інтервал для математичного сподівання m при відомому середньому вквadraticному відхиленні σ знаходять за формулою:

$$\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right). \quad (6.9)$$

Тут n – об'єм вибірки ($n > 30$), а значення t обчислюють за формулою $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ з таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (див. додаток табл. 2).

Зі збільшенням обсягу n вибірки число $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ зменшується, тобто точність оцінки підвищується. Зростання надійності $\gamma = 2\Phi(t)$ веде до збільшення t , отже, до зростання δ , або до зниження точності.

Приклад 6.2.

Нехай $\sigma = 2$, $n = 25$, $\gamma = 0,95$. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання m , якщо $\bar{x} = 5$.

Розв'язання.

Для обчислення t використаємо рівняння:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475.$$

Із таблиці значень ф-ції Лапласа (див. – додатки, табл.2) визначаємо $t = 1,96$. Тоді

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{25}} = 0,784.$$

За формулою (6.9) маємо надійний інтервал для математичного сподівання m :

$$(5 - 0,784; \quad 5 + 0,784) \\ \text{або} \\ (4,216; \quad 5,784).$$

Цей результат можна розуміти так: якщо зроблена достатньо велика кількість вибірок, то в 95 % випадків значення m належить знайденому інтервалу, а в 5 % це значення m може вийти за межі інтервалу.

Нехай задано генеральну сукупність з нормальним розподілом $X \in N(m, \sigma)$, де σ – невідоме, надійність γ – задана.

Довірчий інтервал математичного сподівання m при невідомому середньому квадратичному відхиленні знаходять за формулою:

$$\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \right). \quad (6.10)$$

Тут S – виправлене середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , обчислене за вибіркою; n – об'єм вибірки ($n < 30$), t_γ – величина з розподілом Стюдента (беруть з табл. 4 додатків за значеннями γ та n).

Приклад 6.3.

Нехай X – нормально розподілена випадкова величина, яка має такі параметри: $n = 25$, $\bar{x} = 20$, $S = 0,4$. Знайти довірчий інтервал для оцінювання математичного сподівання m , якщо $\gamma = 0,95$.

Розв'язання.

Знаходимо t_γ з табл. 4 додатку: $t_\gamma = t(\gamma, n) = t(0,95; 25) = 2,064$.

Тоді

$$t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 2,064 \cdot \frac{0,4}{5} \approx 0,165.$$

Отже, надійний інтервал для m згідно з формулою (6.10), наступний:

$$(20 - 0,165, 20 + 0,165)$$

або

$$(19,835; 20,165).$$

Розглянуті вище оцінки математичного сподівання використовують для визначення найменшого об'єму вибірки (яку найменшу кількість вимірювань чи іспитів необхідно провести) щоб отримати значення із заданою точністю δ .

Мінімальний об'єм вибірки для знаходження надійного інтервалу математичного сподівання нормального розподілу за відомого σ обчислюють за формулою:

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}. \quad (6.11)$$

Якщо ж σ невідоме, то об'єм вибірки складає:

$$n = \frac{t_\gamma^2 S^2}{\delta^2}. \quad (6.12)$$

Результат округлюють до найближчого цілого.

Приклад 6.4.

Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю $\gamma = 0,99$ точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки дорівнює $\delta = 0,6$, якщо середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3$.

Розв'язання.

Для обчислення t використаємо рівняння:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{0,995}{2} = 0,495.$$

Із таблиці значень ф-ції Лапласа (див. – додатки, *табл.2*) визначаємо $t = 1,96$.
Тоді

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{25}} = 0,784.$$

Для обчислення t використаємо рівняння:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475.$$

Із таблиці значень ф-ції Лапласа (див. – додатки, *табл.2*) визначаємо $t \approx 2,58$.
Об'єм вибірки за формулою (6.11) дорівнює:

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2} = \frac{2,58^2 \cdot 3^2}{0,6^2} = 166,41 \approx 166.$$

Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу знаходять за формулами:

$$(S(1-q); S(1+q)) \quad (6.13)$$

при $q < 1$

та

$$(0; S(1+q)) \quad (6.14)$$

при $q > 1$.

У свою чергу q знаходять за таблицею значень $q = q(\gamma, n)$ χ^2 -розподілу (див. – додатки, *табл.5*)

Розглянуту оцінку середньоквадратичного відхилення використовують в якості оцінки точності вимірювань.

Приклад 6.5.

Виконано 10 вимірів одним приладом без систематичних похибок деякої фізичної величини. виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових похибок вимірів виявилось рівне $S = 0,5$. Вважаючи результати вимірів розподіленими нормально, знайти точність приладу з надійністю $\gamma = 0,95$.

Розв'язання.

Знаходимо q з табл. 5 додатку: $q = q(\gamma, n) = q(0,95; 10) = 0,65$.

Оскільки $q < 1$, то інтервал для σ визначимо за формулою (6.13):

$$(0,5(1-0,65); 0,5(1+0,65))$$

або

$$(0,325; 0,825).$$

Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових похибок вимірів. Отже, надійний інтервал, який покриває σ із заданою надійністю $\gamma = 0,95$ складає: $(0,325; 0,825)$.

Для оцінки з надійністю γ ймовірності настання події A в кожному з n незалежних випробувань, якщо подія A відбулась m разів, використовують довірчий інтервал:

$$(p_1; p_2), \quad (6.15)$$

де

$$p_1 = \frac{1}{t^2 + n} \left(m + \frac{t^2}{2} - t \sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \frac{t^2}{4}} \right), \quad (6.16)$$

$$p_2 = \frac{1}{t^2 + n} \left(m + \frac{t^2}{2} + t \sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \frac{t^2}{4}} \right), \quad (6.17)$$

Параметр t – аргумент функції Лапласа, для якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, γ – надійність оцінки. Його знаходять з таблиці значень функції Лапласа (див. – додатки, табл.2).

У випадку, коли число випробувань n велике (кілька сотень), у якості довірчого інтервалу приймають проміжок:

$$\left(p^* - t \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}; p^* + t \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \right), \quad (6.16)$$

де $p^* = \frac{m}{n} = \frac{n_A}{n}$ – відносна частота події A (статистична ймовірність).

Приклад 6.6.

Знайти з надійністю $\gamma = 0,95$ інтервальну оцінку для ймовірності настання події A в кожному із $n = 100$ незалежних повторних випробувань, якщо подія відбулась $m = 40$ разів.

Розв'язання.

Для обчислення t використаємо рівняння:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{0,995}{2} = 0,495.$$

Із таблиці значень ф-ції Лапласа (див. – додатки, *табл.2*) визначаємо $t = 1,96$.

За формулами (6.16) та (6.17) обчислимо межі довірчого інтервалу для оцінки ймовірності настання події:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{t^2 + n} \left(m + \frac{t^2}{2} - t \sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \frac{t^2}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{(1,96)^2 + 100} \left(40 + \frac{1,96^2}{2} - 1,96 \sqrt{\frac{40 \cdot 60}{100} + \frac{(1,96)^2}{4}} \right) = 0,31, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{t^2 + n} \left(m + \frac{t^2}{2} + t \sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \frac{t^2}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{(1,96)^2 + 100} \left(40 + \frac{1,96^2}{2} + 1,96 \sqrt{\frac{40 \cdot 60}{100} + \frac{(1,96)^2}{4}} \right) = 0,49, \end{aligned}$$

Отже, інтервальною оцінкою для ймовірності настання події A буде довірчий інтервал $(0,31; 0,49)$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають статистичною оцінкою?
2. Коли мають справу з параметричною задачею оцінювання?
3. Коли мають справу з непараметричною задачею оцінювання?
4. Вказати типи задач параметричного оцінювання.
5. Що називають точковою статистичною оцінкою?
6. Зазначити основні властивості, що описують якість оцінки числового параметру.
7. Що таке незміщена точкова статистична оцінка?
8. Що таке зміщена точкова статистична оцінка?

9. Що називають ефективною точковою статистичною оцінкою?
10. Що називають спроможною (обґрунтованою) точковою статистичною оцінкою?
11. Що є точковою незміщеною статистичною оцінкою для математичного сподівання?
12. Що означає точкова незміщена статистична оцінка для дисперсії?
13. Що називають виправленою дисперсією?
14. Що називають інтервальною статистичною оцінкою для параметрів генеральної сукупності?
15. Що називають точністю оцінки?
16. Що називають надійністю оцінки?
17. Що називають довірчим інтервалом?
18. Що називають рівнем значущості?
19. Як побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання m із заданою надійністю γ при відомому середньому квадратичному відхиленні?
20. Як побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання m із заданою надійністю γ при невідомому середньому квадратичному відхиленні?
21. Як обчислити мінімальний об'єм вибірки для знаходження надійного інтервалу математичного сподівання нормального розподілу?
22. Як побудувати довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу?
23. Як оцінити ймовірність настання події?

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити незміщені та спроможні оцінки математичного сподівання та дисперсії для наступних вибірок:

а)

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

б)

x_i	0	2	3	6	10	13
n_i	7	5	13	30	10	5

в)

інтервали	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15
n_i	2	4	3	6	10

2. Для вивчення рівня стабільності роботи локальної мережі компанії проведено обстеження випадково вибраних офісів. Упродовж десяти днів фіксувалася кількість збоїв у роботі мережі й отримали такий ряд: 2, 4, 3, 0, 3, 0, 3, 2, 0, 1. Знайти незміщену оцінку математичного сподівання, вибіркoву дисперсію, незміщену вибіркoву дисперсію.

3. У результаті статистичних досліджень випадкової величини X отримано таку вибірку: 47, 45, 46, 46, 46, 45, 47, 44, 46, 45, 45, 46, 46, 44, 46, 48, 46, 46, 45, 46, 44, 46, 45, 47, 46, 46, 47, 46, 46, 48, 44, 46, 45, 46, 45, 46, 44, 47, 46, 46, 45, 47, 48, 44, 46, 46, 45, 46, 47, 45. Знайти незміщені статистичні оцінки для математичного сподівання та дисперсії.

4. Автомат, що розливає моторне мастило, має забезпечувати нормальний розподіл об'єму із стандартним відхиленням $\sigma = 2,25$ мл. Для контролю було відібрано $n=25$ пляшок, в яких середній об'єм $\bar{x} = 1002$ мл. З надійністю $\gamma = 0,95$ знайти довірчий інтервал для середнього об'єму моторного мастила в пляшках у генеральній сукупності.

5. Виконано 5 незалежних спостережень над випадковою величиною $X \in N(m, \sigma)$. Задані вибіркoве середнє $\bar{x} = 4$ та виправлена дисперсія $S^2 = 660,5$. Побудувати для математичного сподівання $M(X)=m$ довірчий інтервал із надійністю $\gamma = 0,95$.

6. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормального розподілу $X \in N(m, \sigma)$, якщо $n=25$; $\bar{x} = 16,8$; $\sigma^2 = 25$; $\alpha = 0,01$.

7. Для оцінки параметра нормально розподіленої випадкової величини була зроблена вибірка об'єму 30 одиниць і обчислено $S = 1,5$. Знайти довірчий інтервал, що покриває σ з ймовірністю $\gamma = 0,99$.

8. Зроблено $n = 20$ вимірів параметра, що контролюється, певної продукції. За отриманою вибіркою знайдено значення вибіркового середнього квадратичного відхилення $S = 0,25$. Потрібно побудувати довірчий інтервал для σ з ймовірністю $\gamma = 0,95$. (σ характеризує розкидання значень параметру, що контролюється).

9. За вибіркою з нормального розподілу:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	4	3	4	6	2	1

з надійністю 0,95 знайти інтервальні оцінки для параметра m , якщо $\sigma^2 = 4$.

10. Внаслідок вимірювання довжини 50 випадково відібраних деталей отримано $\bar{x} = 10$ см. Відшукати довірчий інтервал, який з надійністю $\gamma = 0,95$ містить середній розмір усієї партії деталей, якщо є підстави вважати, що генеральна дисперсія $\sigma^2 = 0,09$, а розміри деталей усієї партії розподілені нормально.

11. За даними вибірки об'ємом $n=20$ обчислили виправлене середнє квадратичне відхилення $S=3$. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти з надійністю $\gamma = 0,99$ довірчий інтервал для оцінки генерального середнього квадратичного відхилення.

12. Вважаючи, що зріст людини розподілений за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$, знайти об'єм вибірки, необхідний для забезпечення точності оцінки $\delta = 2$ см і надійності оцінки $\gamma = 0,95$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Обчислити незміщені та спроможні оцінки математичного сподівання та дисперсії для вибірки:

інтервали	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30
n_i	16	2	1	14	7

2. Із нормально розподіленої генеральної сукупності, середнє квадратичне відхилення якої дорівнює $\sigma = 2$, зробили вибірку об'ємом $n=25$. Середнє вибіркове дорівнює $\bar{x}=10$. Знайти з надійністю $\gamma = 0,95$ довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання генеральної сукупності

3. Для оцінки параметра нормально розподіленої випадкової величини була зроблена вибірка об'єму 30 одиниць і обчислено $S = 1,5$. Знайти довірчий інтервал, що покриває σ з надійністю $\gamma=0,9$.

4. Виконано 5 незалежних спостережень над випадковою величиною $X \in N(m, \sigma)$. Вибіркове середнє $\bar{X}$ та виправлена дисперсія відомі: $\bar{X} = 4$, $S^2 = 660,5$. Побудувати для математичного сподівання $M(X)=m$ довірчий інтервал із надійністю $\gamma = 0,95$.

5. Визначити мінімальний обсяг вибірки для того, щоб із надійністю $\gamma=0,99$ можна було отримати оцінку математичного сподівання нормально розподіленої сукупності $M(X)=0,2$, якщо середнє квадратичне відхилення в генеральній сукупності $\sigma = 1,5$ і оцінка знаходиться за допомогою вибіркової середньої величини.

6. Глибина моря вимірюється приладом, систематична помилка якого дорівнює нулю, а випадкові помилки розподілені нормально з $\sigma=15$ м. Скільки треба зробити незалежних вимірів, щоб визначити глибину моря з помилкою не більше 5 м при надійності $\gamma=0,99$?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання m нормального розподілу з надійністю $\gamma=0,95$, знаючи вибіркове середнє $\bar{x}$, об'єм вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ :

№ варіанта	$\bar{x}$	n	σ
1	75,17	36	6
2	75,15	64	8
3	75,13	100	10
4	75,11	144	12
5	75,09	196	14
6	74,17	35	5
7	74,15	63	7
8	74,12	99	9
9	73,11	142	11
10	74,20	194	13
11	76,15	38	7
12	76,20	66	9
13	76,13	102	11
14	76,12	146	14
15	76,10	198	15
16	74,16	48	6
17	74,14	80	8
18	74,12	120	10
19	74,10	166	12
20	74,08	222	14

2. Статистичне середнє значення вимірюного в n прийомів вертикального кута дорівнює $\bar{x}$, а статистичне середнє квадратичне відхилення S . Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання генеральної сукупності m з довірчою надійністю $\gamma=0,95$:

№ варіанта	$\bar{x}$	n	S
1	25,2	12	3,6
2	37,4	13	2,8
3	47,5	14	1,9
4	44,7	15	4,6
5	58,3	16	5,8
6	29,9	17	3,0
7	41,0	18	2,6
8	33,3	19	2,8

№ варіанта	$\bar{x}$	n	S
9	28,7	20	2,1
10	29,1	19	2,2
11	59,5	18	5,9
12	47,6	17	4,3
13	48,1	16	4,0
14	39,8	15	3,3
15	35,5	14	2,9
16	52,2	13	3,6
17	28,8	12	1,9
18	47,7	11	2,8
19	52,3	15	5,5
20	55,3	14	4,7

3. Здійснено n вимірів горизонтального кута з похибками, які розподілені за нормальним законом. Вибіркове середньоквадратичне відхилення вимірів становить S . Знайти довірчий інтервал для невідомого середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності з довірчою надійністю $\gamma = 0,99$.

№ варіанта	n	S
1	7	0,47
2	8	0,55
3	9	0,61
4	10	0,7
5	11	0,75
6	12	0,82
7	13	0,85
8	12	0,9
9	11	1,05
10	10	0,75
11	9	1,20
12	8	0,77
13	7	0,54
14	8	0,38
15	9	0,47
16	10	0,29
17	11	0,38
18	12	0,44
19	13	0,68
20	11	0,93

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3987	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3937	3932	3925	3918
0,2	3910	3901	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	2291	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2035	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1526	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0271	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0159	0155	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43872	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48860	48899
2,3	48928	48966	48983	49010	49036	49061	49086	49110	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	49977									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Таблиця 3
Розподіл Пуассона

$$\text{Значення функції } P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3176	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Таблиця 4

Таблиця значень $t_{\gamma} = t(\gamma, n)$

n / γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,36	5,04
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92

n / γ	0,95	0,99	0,999
20	2,093	0,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,991	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Таблиця 5

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n / γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92

n / γ	0,95	0,99	0,999
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,211
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко Н.В., Наголкіна З.І., Пастухова М.С. Теорія ймовірностей : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2016. 111 с., URL: https://org2.knuba.edu.ua/pluginfile.php/36229/mod_resource/content/4/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96.%20%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf (дата звернення: 04.01.2025).
2. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с., URL: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/04/Vasyl-kiv-I.M.-TIMS_CHASTYNA_1.pdf (дата звернення: 04.01.2025).
3. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. Теорія ймовірностей : навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 103 с.
4. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей і математична статистика : Посібник з розв'язування задач. Київ : Центр навчальної літератури, 2019. 576 с.
5. Комбінаторне, імовірнісне мислення та математична статистика. Збірник завдань із повними розв'язками / Ю.О. Захарійченко та ін. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2014. 128 с.
6. Левківська Л.В. Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів денної форми навчання спеціальності 075 «Маркетинг» освітньої програми «Маркетинг послуг». Київ : НТУ, 2022. 90 с.
7. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с., URL: <http://socrates.vsau.org/repository/getfile.php/24513.pdf> (дата звернення: 04.01.2025).
8. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Львів : ЛьвДУВС, 2017. 292 с., URL: <https://dspace.lvduvs.edu.ua/bitstream/1234567890/629/1/%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%20%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D0%BF%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf> (дата звернення: 04.01.2025).
9. Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести) : навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / Соловко Я.Т., Остафійчук П.Г., Гарпуль О.З., Войтик С.А. Івано-Франківськ : Репозитарій /ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. 150 с.
10. Шелестовський Б.Г., Габрусев Г.В., Габрусєва І.Ю. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Тернопіль : СМП «Тайп», 2023. 142 с., URL: https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/41009/1/%D0%A2%D0%86%D0%9C%D0%A1_2023.pdf (дата звернення: 04.01.2025).