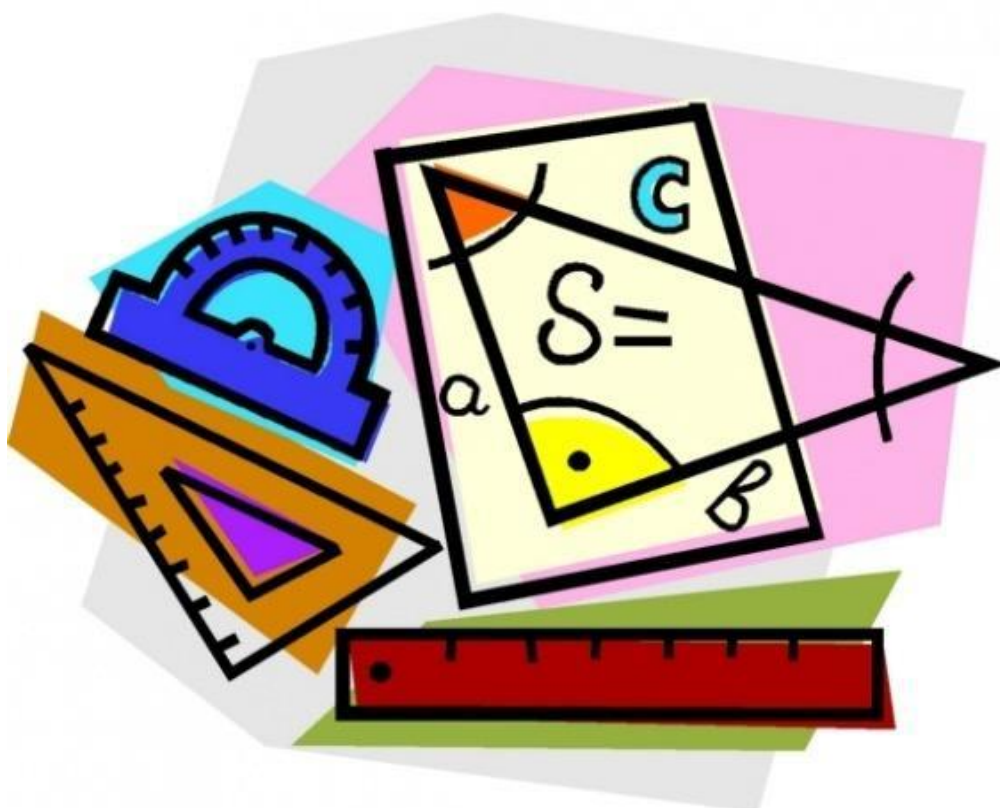




МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольних робіт
з дисципліни:
“ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА”

для студентів заочної форми навчання
спеціальності 073 «Менеджмент»
освітньої програми «Логістика»



Київ НТУ 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольних робіт
з дисципліни:
“ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА”
для студентів заочної форми навчання
спеціальності 073 «Менеджмент»
освітньої програми «Логістика»

Затверджено
на засіданні науково - методичної Ради
Національного транспортного університету
протокол № ____ від _____ 2023 р.
Перший проректор,
професор _____ Олександр ГРИЩУК

Київ НТУ 2023

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни: “Вища та прикладна математика” для студентів заочної форми навчання спеціальності 073 «Менеджмент» освітньої програми «Логістика» / Укл.: Людмила Левківська, Юлія Мейш, Людмила Шевчук — К.: НТУ, 2023. — 132 с.

Укладачі: Левківська Людмила Володимирівна, к.т.н., доцент
Мейш Юлія Анатоліївна, д.т.н., професор
Шевчук Людмила Володимирівна, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск:
Левківська Людмила Володимирівна, к.т.н., доцент

ЗМІСТ

Ст

Вступ.....	5
1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1.....	7
1.1. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1.....	7
1.1.1. Матриці: основні поняття та дії над ними.....	7
1.1.2. Визначники та їх властивості.....	9
1.1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: метод Крамера, Гауса, матричний метод.....	13
1.1.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Різні види рівнянь прямої на площині.....	19
1.1.5. Лінії другого порядку на площині.....	26
1.1.6. Поняття функції однієї змінної. Границя функції. Обчислення границь. Неперервність функції в точці.....	31
1.1.7. Похідна функції: її означення, механічний, геометричний та фізичний зміст. Диференціювання функцій.....	38
1.1.8. Диференціал функції однієї змінної	42
1.1.9. Деякі застосування диференціального числення для дослідження функції і побудови її графіка.....	44
1.2. ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1.....	50
1.3. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1.....	62

2. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2.....	77
2.1. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2.....	77
2.1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Основні методи інтегрування.....	77
2.1.2. Визначений інтеграл та його основні властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Основні методи обчислення визначених інтегралів.....	82
2.1.3. Деякі застосування визначених інтегралів до геометричних задач.....	86
2.1.4. Невласні інтеграли першого та другого роду.....	90
2.1.5. Поняття функції кількох змінних. Частинні похідні. Похідна за напрямком та градієнт.....	93
2.1.6. Графічний метод розв’язування двовимірних задач.....	101
2.2. ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2.....	104
2.3. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2.....	124
3. Список рекомендованої та використаної літератури.....	132

ВСТУП

Для студентів факультету заочного, дистанційного навчання та підготовки іноземних громадян спеціальності 073 «Менеджмент» освітньої програми «Логістика» навчальним планом передбачені лекційні і практичні заняття з вищої та прикладної математики протягом настановчої сесії та під час двох екзаменаційних сесій. Але ці заняття носять переважно оглядовий характер. Їх мета – звернути увагу на загальні розділи курсу, розглянути окремі питання програми (основні, найбільш складні для сприйняття або недостатньо повно висвітлені в рекомендованих посібниках), сформулювати основні теореми та вивести ключові формули, детально розібрати найбільш значущі практичні задачі. За звичай цього недостатньо для глибокого вивчення учбового матеріалу, тому студенти-заочники повинні багато працювати над матеріалом самостійно, використовуючи підручники, навчальні посібники та інші джерела. В цьому їм також допоможуть дані методичні вказівки, де приводяться всі необхідні для освоєння дисципліни теоретичні відомості, які ілюструються достатньою кількістю розв’язаних завдань.

У процесі вивчення курсу дисципліни «Вища та прикладна математика» студент-заочник освітньої програми «Логістика» має самостійно виконати дві контрольні роботи, які складаються з ряду практичних задач, сформульованих у відповідності до робочої програми.

Кожну контрольну роботу (одну на зимову, а іншу на літню сесію) необхідно виконувати в окремому зошиті в клітинку, на обкладинці якого вказується дисципліна, група і курс, прізвище та ім’я студента, а також номер залікової книжки. При написанні кожної контрольної роботи спочатку вказують номер варіанту, який відповідає порядковому номеру студента в списку групи. Далі записують умову кожного завдання і наводять їх розв’язання. При цьому розв’язки задач і пояснення до них повинні бути досить детальними з посиланнями на відомі формули та теореми. Вони можуть також супроводжуватись відповідними рисунками та графіками, які необхідно

виконувати простим олівцем. У цьому методичному посібнику представлені приклади виконання та правильного оформлення обох контрольних робіт.

Виконану контрольну роботу необхідно за два тижні до початку сесії здати на перевірку викладачу, який оцінюватиме набуті знання з дисципліни «Вища та прикладна математика». При наявності зауважень і помилок робота може бути повернута студенту на доопрацювання. Після внесення необхідних коректив та доповнень згідно із зауваженнями викладача, студент повинен захистити контрольну роботу. Успішно захищена контрольна робота №1 є допуском студента до складання заліку з вищої та прикладної математики у першому семестрі. Аналогічно захист студентом, написаної ним контрольної роботи №2, є його допуском до іспиту у другому семестрі, оскільки залік та іспит з математики передбачені учбовим планом для студентів освітньої програми «Логістика».

У разі виникнення питань або неможливості самостійного розв'язання деяких контрольних завдань, необхідно звернутися до викладачів кафедри для отримання від них корисних настанов у вигляді усної чи письмової консультації. Але в своїх запитах студент має чітко сформулювати що саме для нього є незрозумілим.

Важливо знати: *В контрольній роботі повинні бути розв'язані завдання лише свого варіанту. Робота, яка містить завдання не свого варіанту, не перевіряється.*

1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

1.1. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1

1.1.1 МАТРИЦІ: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Матрицею називають прямокутну таблицю чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), складену з m рядків і n стовпців та записану у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.1.1)$$

де a_{ij} - елементи матриці.

Елементи матриці розташовують за чітким правилом: перший індекс i завжди означає номер рядка (зверху вниз), а другий j – номер стовпця (зліва направо), на перетині яких розташований даний елемент.

Для позначення матриць використовують великі літери. Скорочено матрицю записують так:

$$A = (a_{ij}), \text{ де } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.1.2)$$

Добуток кількості рядків на кількість стовпців ($m \times n$) називають **розміром** матриці.

Діагональ матриці, проведenu з верхнього лівого кута матриці до нижнього правого, називають головною. Іншу діагональ вважають побічною.

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців є **квадратною**. В іншому випадку мають справу з **прямокутною** матрицею.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці визначають її **порядок**.

Матрицю, у якої всього один рядок, називають матрицею-рядком, а матрицю, у якої всього один стовпець – матрицею-стовпцем.

Дві матриці $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ вважають рівними, якщо вони однакових розмірів ($m \times n$) і мають рівні відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$.

Якщо всі елементи матриці рівні нулю, то вона називається нульовою.

Квадратну матрицю називають **трикутною**, якщо всі елементи, що розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися, є ненульові.

Квадратну матрицю вважають **діагональною**, якщо всі її елементи, крім тих, що лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональну матрицю, у якій кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називають **одиничною** і позначають літерою E . Наприклад, одинична

матриця третього порядку має вигляд: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрицю A^T називають **транспонованою** до матриці A , якщо рядки матриці A^T є стовпцями матриці A , а стовпці – рядками матриці A .

Наприклад, у результаті транспонування матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

отримаємо матрицю $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

ОСНОВНІ ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

1. Сумою (різницею) двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ одного розміру вважають матрицю $C_{m \times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$ того ж самого розміру, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць, які додаються (віднімаються). Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+4 & 0+1 \\ 2+1 & 1-1 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-1) & -2-1 \\ 5-0 & 0-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ **на довільне дійсне число** λ (або числа λ на матрицю $A_{m \times n}$) називають матрицю, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідного елементу матриці (a_{ij}) на число λ , тобто $C_{m \times n} = (\lambda a_{ij})$. Наприклад,

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 15 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ **на матрицю** $B_{n \times k} = (b_{ij})$ називають матрицю $C_{m \times k} = A \cdot B = (c_{ij})$, у якій кожен елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj};$$

де $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Наприклад, щоб визначити елемент c_{24} , що стоїть в другому рядку і четвертому стовпці матриці $C = A \cdot B$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи четвертого стовпця матриці B .

Операція множення двох матриць існує лише для узгоджених матриць.

Матриця A вважається **узгодженою з матрицею B** , якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B . Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

Зауваження: У загальному випадку для добутку матриць не виконується закон комутативності, тобто

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Приклад 1.1.1

Знайти матрицю $C = A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Матриця $A_{2 \times 2}$ узгоджена з матрицею $B_{2 \times 3}$, тому за означенням у результаті їх добутку маємо матрицю $C_{2 \times 3}$:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.1.2 ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

З кожною квадратною матрицею пов'язують певну її числову характеристику – визначник. Визначником квадратної матриці є визначник, сформований з елементів даної матриці. Елементами визначника можуть бути числа, вирази, функції тощо. Для позначення визначника квадратної матриці A використовують символіку: $\Delta(A)$ або $\det(A)$.

Визначником другого порядку відповідним до квадратної матриці другого порядку називається число або вираз, які обчислюють за формулою:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1.1.3)$$

Оскільки елементи a_{11} та a_{22} у визначнику другого порядку складають **головну діагональ** визначника, а елементи a_{12} та a_{21} - **побічну діагональ**, то **для обчислення визначника другого порядку необхідно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі**.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-1) = 12 + 3 = 15;$$

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Для обчислення визначників третього порядку існує декілька методів:

1) Правило трикутника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.1.4)$$

Перші три доданки, які беруть зі знаком *плюс*, є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Наступні три доданки, які беруть зі знаком *мінус*, є добутками елементів, що стоять на побічній діагоналі та у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна побічній діагоналі.

Для запам'ятовування правила (1.1.4) зручно користуватися схемою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \times & \circ & \circ \\ \circ & \times & \circ \\ \circ & \circ & \times \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \times & \circ \\ \circ & \circ & \times \\ \times & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \times \\ \times & \circ & \circ \\ \circ & \times & \circ \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \times \\ \circ & \times & \circ \\ \times & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \times & \circ \\ \times & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \times \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \times & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \times \\ \circ & \times & \circ \end{vmatrix}.$$

2) Теорема Лапласа (метод розкриття визначника за довільним рядком або стовпцем):

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \text{або} \quad \Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}. \quad (1.1.5)$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають його мінор M_{ij} , взятий з певним знаком за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.1.6)$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) визначника n -го порядку називають визначник $(n-1)$ -го порядку, який утворюється із даного визначника в результаті викреслення i -го рядка та j -го стовпця, на перетині яких розташований елемент a_{ij} . Отже, порядок мінора M_{ij} на одиницю менший від порядку початкового визначника.

Наприклад, мінором елемента a_{23} визначника третього порядку є визначник $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Рекомендація: При обчисленні визначника за теоремою Лапласа варто обрати той рядок або стовпець, який містить більше нульових елементів.

Приклад 1.1.2

Обчислити визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

I спосіб:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 12 + 2 - 3 + 12 = 23.$$

II спосіб: У випадку розкриття визначника за третім стовпчиком маємо $\Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$.

Обчислимо необхідні алгебраїчні доповнення.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

Алгебраїчні доповнення A_{23} обчислювати непотрібно оскільки $a_{23} = 0$.

Таким чином, $\Delta = 1 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 = 23$.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1. Визначник не зміниться, якщо поміняти місцями його рядки зі стовпцями. (нагадаємо, що ця операція називається *транспонуванням*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Визначник змінить свій знак на протилежний, якщо переставити місцями будь-які два його рядки (стовпці):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Визначник з двома пропорційними рядками (стовпцями) дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, а саме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a & a_{12} + b \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме нерівне нулю число, то визначник не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ці властивості правильні для визначників будь-якого порядку.

1.1.3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ: МЕТОД КРАМЕРА, ГАУСА, МАТРИЧНИЙ МЕТОД

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.1.7)$$

де a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) – коефіцієнти при невідомих;

$b_1, b_2, \dots, b_m$ – вільні члени.

Системе (1.1.7) вважають *однорідною*, якщо всі її вільні члени рівні нулю. Якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля, то систему називають *неоднорідною*. Однорідна система завжди має тривіальний розв'язок, тобто нульовий.

Впорядкований набір n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ є *розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь* (1.1.7), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь вважають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

а) МЕТОД КРАМЕРА

Якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1.7) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($m = n$) і головний визначник системи складений з коефіцієнтів при невідомих $\Delta \neq 0$, то така система має єдиний розв'язок, який можна знайти за *правилом Крамера*:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1.8)$$

де Δ – головний визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь, утворений з коефіцієнтів при невідомих,

Δ_j – допоміжний визначник, який утворюється з головного визначника Δ заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів.

У випадку коли $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система є несумісною і розв'язків немає. Якщо ж $\Delta = \Delta_j = 0$, ($j = 1, 2, \dots, n$), то система є невизначеною і має безліч розв'язків.

Приклад 1.1.4

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$а) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10, \end{cases} \quad б) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 = 3. \end{cases} \quad в) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 6x_1 + 9x_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$а) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник Δ і допоміжні визначники Δ_1 та Δ_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2.$$

Геометрично це означає, що прямі $2x_1 - 3x_2 = 4$ та $4x_1 - 5x_2 = 10$ перетинаються в точці $M(5; 2)$.

$$б) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 = 3. \end{cases}$$

$$\text{В даному випадку} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3.$$

Оскільки $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$, то система не має розв'язку.

Геометрично це означає, що прямі $2x_1 + 3x_2 = 1$ та $4x_1 + 6x_2 = 3$ не перетинаються.

$$в) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 6x_1 + 9x_2 = 3. \end{cases}$$

В цьому випадку маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система має безліч розв'язків.

Геометрично це означає, що прямі $2x_1 + 3x_2 = 1$ та $6x_1 + 9x_2 = 3$ співпадають.

б) МАТРИЧНИЙ МЕТОД

Якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1.7) $m = n$ і $\Delta \neq 0$, то таку систему також можна розв'язати матричним способом.

Для цього введемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицю A , складену з коефіцієнтів при невідомих системи (1.1.7), називають *основною матрицею* системи, матрицю X – матрицею невідомих, а матрицю B – матрицею вільних членів. Тоді згідно з правилом множення матриць система (1.1.7) запишеться одним матричним рівнянням виду:

$$A \cdot X = B, \quad (1.1.9)$$

розв'язком якого є матриця X :

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad (1.1.10)$$

де A^{-1} – обернена матриця до матриці A .

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A , якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Вона існує для кожної **невиродженої** матриці A , тобто квадратної матриці в якій визначник не дорівнює нулю ($\det(A) \neq 0$).

Обернену матрицю знаходять за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.1.11)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A , обчислені за формулою (1.1.6).

Приклад 1.1.5

Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: Спочатку обчислимо визначник заданої матриці:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$$

Оскільки $\det(A) \neq 0$, то матриця A невироджена і для неї існує обернена матриця A^{-1} .

За формулою (1.1.6) знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів a_{ij} матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \cdot (-1) = -1; & A_{21} &= (-1)^3 \cdot 1 = -1; \\ A_{12} &= (-1)^3 \cdot 2 = -2; & A_{22} &= (-1)^4 \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

Тоді за формулою (1.1.11), маємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.1.6

Розв'язати задану систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Розв'язання:

Для цього введемо три наступні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 31 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Тоді задану систему рівнянь можна представити одним матричним рівнянням виду $A \cdot X = B$, розв'язком якого є $X = A^{-1} \cdot B$.

Головний визначник матриці A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 - 20 - 12 - 10 + 2 = -27 \neq 0.$$

Отже, матриця A невироджена і має обернену матрицю A^{-1} .

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} даної матриці:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 4) = -6; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7; \end{aligned}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 20) = 18;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9.$$

Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-27} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix},$$

а розв'язком системи є матриця:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-27} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-27} \cdot \begin{pmatrix} 93 - 120 \\ 31 - 220 + 162 \\ -248 + 140 - 81 \end{pmatrix} = \frac{1}{-27} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -27 \\ -189 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: (1; 1; 7).

в) МЕТОД ГАУСА

Систему (1.1.7) можна розв'язати методом Гауса, причому навіть у випадку коли $m \neq n$.

Це метод послідовного виключення невідомих. Він складається з двох етапів.

ПЕРШИЙ етап ґрунтується на елементарних перетвореннях рядків системи, а саме, система залишається рівносильною початковій системі, якщо:

- 1) переставити місцями два рівняння;
- 2) помножити обидві частини рівняння на ненульовий множник;
- 3) додати почленно до рівняння елементи іншого рівняння, помножені на одне й те саме число.

За допомогою таких перетворень систему зводять до трапецеподібного або трикутного вигляду.

На **ДРУГОМУ етапі** послідовно визначають невідомі, рухаючись від останнього рівняння до першого.

Зауваження. Оскільки СЛАР взаємно однозначно відповідає розширена матриця (складена з коефіцієнтів при невідомих та стовпчика вільних членів), то елементарні перетворення рівнянь системи рівносильні перетворенню рядків розширеної матриці. Тому надалі при розв'язуванні СЛАР за методом Гауса будемо працювати лише з розширеною матрицею системи.

Приклад 1.1.7

Розв'язати задану систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю даної системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 6 \end{array} \right) \quad \text{і}$$

використовуючи елементарні перетворення, зведемо її до трикутного вигляду.

Для цього помножимо почленно перший рядок на (-2) і додамо його до другого рядка. Аналогічно домножимо перший рядок на (-3) і додамо його до третього рядка. Після таких перетворень отримаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Віднімемо від другого рядка третій:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Міняємо місцями другий рядок з третім і помноживши другий рядок на (-5) , додаємо його до третього рядка. Отримуємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Ділимо останній рядок матриці почленно на (-3) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Із утвореної трикутної матриці складемо систему рівнянь і рухаючись від останнього рівняння до першого, послідовно визначаємо її невідомі.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ – розв'язок даної системи.

1.1.4. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. РІЗНІ ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Аналітична геометрія – це розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

Найпростішими задачами аналітичної геометрії є задачі:

1) знаходження відстані між двома точками на площині $A_1(x_1, y_1)$ та $A_2(x_2, y_2)$:

$$\rho(A_1A_2) = |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad (1.1.12)$$

2) знаходження координат точки $M(x, y)$, яка ділить відрізок A_1A_2 у заданому відношенні $\lambda = |\overline{A_1M}| : |\overline{MA_2}|$ (рис. 1.1.1):

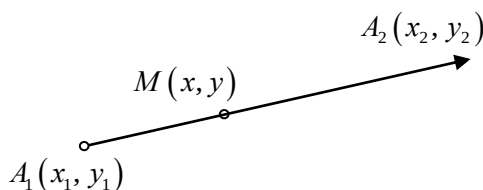


Рис. 1.1.1

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1.1.13)$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок навпіл ($\lambda = 1$), наступні:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.1.14)$$

Найважливішим поняттям аналітичної геометрії є рівняння лінії.

Рівнянням лінії на площині називають рівняння з двома змінними x та y , яке задовольняють координати довільної точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії. У загальному випадку рівняння лінії має вигляд

$$F(x, y) = 0. \quad (1.1.15)$$

Якщо вираз $F(x, y)$ в рівнянні (1.1.15) є многочленом від змінних x та y , то лінія, що задається цим рівнянням, називається *алгебраїчною*. Алгебраїчні

лінії розрізняють залежно від їхнього порядку. Алгебраїчною лінією n -го порядку вважають лінію, що виражається рівнянням n -го степеня. Лінія, яка не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*.

Найпростішою лінією на площині є пряма. Пряма – єдиний представник ліній першого порядку.

ОСНОВНІ ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором перпендикулярним або паралельним до прямої; двома точками, тощо. Кожному способу задання прямої відповідають у прямокутній системі координат відповідні види її рівнянь.

Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n} = (A; B)$. Для цього візьмемо на прямій l довільну точку $M(x; y)$ (рис. 1.1.2) і введемо вектор $\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\vec{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (1.1.16)$$

Рівняння (1.1.16) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора*.

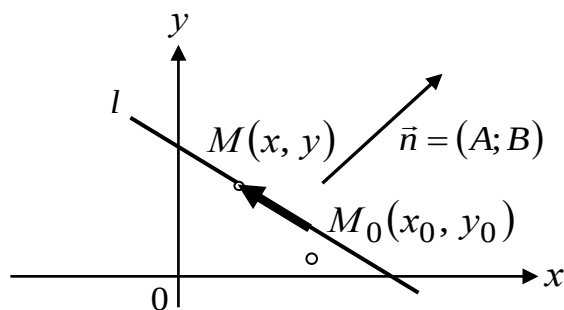


Рис. 1.1.2

Вектор $\vec{n} = (A; B)$, перпендикулярний до даної прямої, називається її *нормальним* вектором. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже, їх відповідні координати пропорційні.

Розкривши у рівнянні (1.1.16) дужки і позначивши $-Ax_0 - By_0 = C$, дістанемо рівняння прямої l

$$Ax + By + C = 0, \quad (1.1.17)$$

яке називають *загальним рівнянням прямої на площині*.

Тут $(A; B)$ – координати нормального вектора.

Розглянемо окремі випадки розміщення прямої залежно від значень коефіцієнтів A, B, C (табл. 1.1.1):

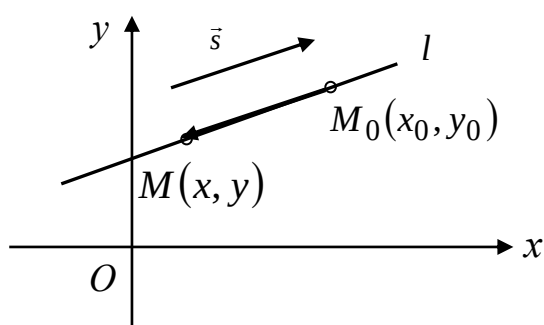
Таблиця 1.1.1

Умова	Рівняння прямої	Положення прямої
$A = 0, B \neq 0$	$By + C = 0$	паралельна осі Ox
$B = 0, A \neq 0$	$Ax + C = 0$	паралельна осі Oy
$C = 0$	$Ax + By = 0$	проходить через поч. координат
$A = 0, C = 0, B \neq 0$	$y = 0$	проходить через вісь Ox
$B = 0, C = 0, A \neq 0$	$x = 0$	проходить через вісь Oy

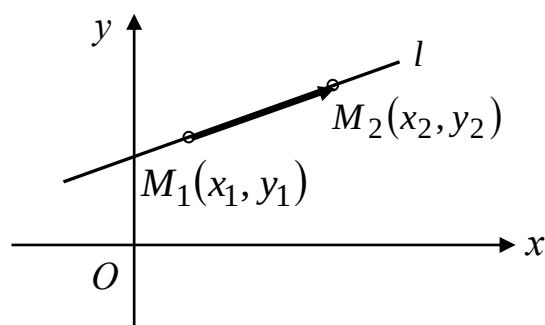
Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (m, n)$, який називають *напрямним вектором прямої* l (рис. 1.1.3, а). Візьмемо на прямій довільну точку $M(x; y)$. Тоді вектори $\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ і $\vec{s} = (m; n)$ колінеарні, отже, їхні координати пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (1.1.18)$$

Рівняння (1.1.18) називають *канонічним рівнянням прямої*. Тут (x_0, y_0) – координати заданої точки, $(m; n)$ – координати напрямного вектора.



а)



б)

Рис. 1.1.3

Нехай пряма l проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 1.3, б). Вибравши вектор $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ за напрямний вектор прямої l і скориставшись рівнянням (1.1.18), дістанемо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (1.1.19)$$

яке називають *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

Позначимо у формулі (1.1.18) відношення через t , тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t.$$

Звідси дістанемо

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \quad t \in R. \quad (1.1.20)$$

Ці рівняння прямої називають **параметричними**. Тут t – деякий параметр; (x_0, y_0) – координати точки, що належить прямій; (m, n) – координати напрямного вектора.

Нехай пряма l проходить через дві точки $A(a, 0)$ і $B(0, b)$ (рис. 1.1.4, а), тобто відсікає на осях координат відрізки довжиною $|a|$ і $|b|$. Підставивши координати точок $A(a, 0)$ і $B(0, b)$ у рівняння (1.1.18), дістанемо рівняння

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \quad \text{або} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (1.1.21)$$

яке називають **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

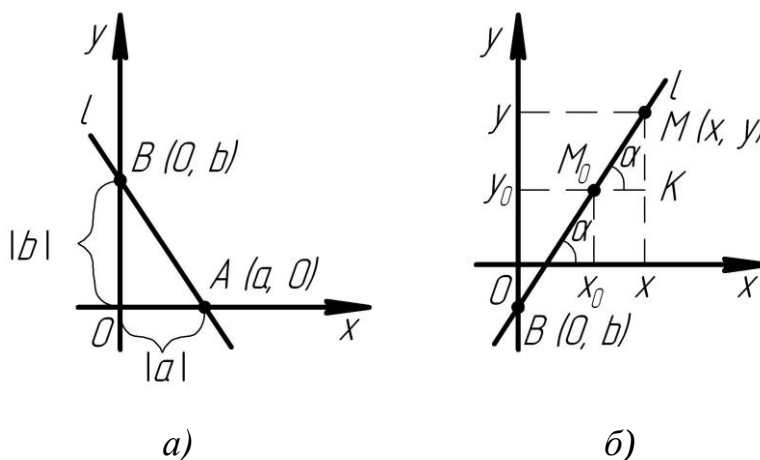


Рис. 1.1.4

Тут a та b – відрізки, які відтинає пряма від осей координат Ox та Oy відповідно.

Якщо пряма l проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис. 1.1.4, б), то число $k = \operatorname{tg} \alpha$ називають **кутовим коефіцієнтом прямої**.

Обравши довільну точку $M(x; y)$ на прямій, дістанемо з трикутника M_0MK :

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MK}{M_0K} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

звідки маємо

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (1.1.22)$$

рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k

Якщо за точку M_0 візьмемо точку $B(0, b)$, то дістанемо рівняння

$$y = kx + b, \quad (1.1.23)$$

яке називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**. Тут b - початкова ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ.

УМОВА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМИХ

Нехай дві прямі на площині L_1 та L_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ (рис. 1.1.5). Позначимо кути нахилу цих прямих до осі Ox через α_1 та α_2 відповідно, причому $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$. Тоді гострий кут φ між прямими визначається формулою $\varphi = |\alpha_2 - \alpha_1|$.

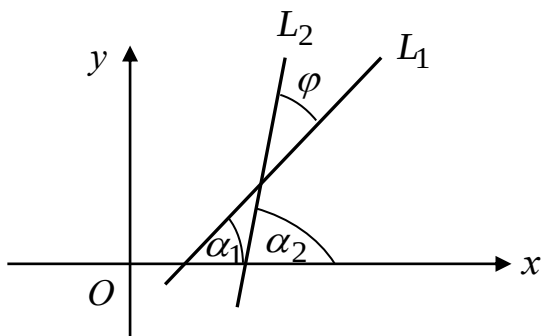


Рис. 1.1.5

Звідси

$$\operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (1.1.24)$$

Якщо прямі L_1 та L_2 паралельні, то $\varphi = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$, отже, $k_2 - k_1 = 0$.

Тому **умова паралельності двох прямих:**

$$k_1 = k_2. \quad (1.1.25)$$

Якщо прямі L_1 та L_2 перпендикулярні, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. У цьому разі $\operatorname{tg} \varphi$ не існує, отже, у формулі (1.1.24) $1 + k_1 k_2 = 0$. Тому **умова перпендикулярності**

двох прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (1.1.26)$$

Нехай прямі L_1 та L_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тоді:

1) кут φ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$) між цими **прямими** визначають через кут ψ між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ та $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$:

$$\cos \psi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (1.1.27)$$

причому $\varphi = \psi$, якщо $\cos \psi \geq 0$ (рис. 1.6, а) і $\varphi = 180^\circ - \psi$, якщо $\cos \psi < 0$ (рис. 1.1.6, б);

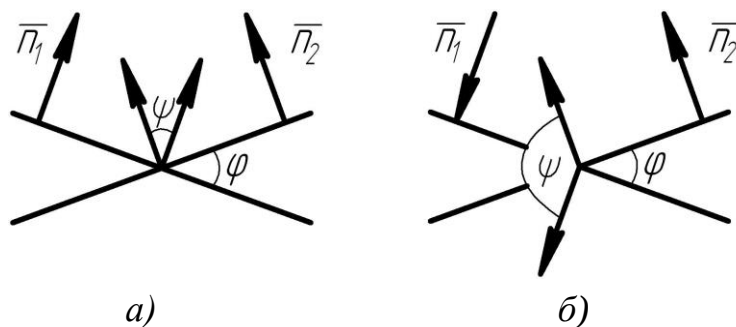


Рис. 1.1.6

2) умова паралельності прямих (рис. 1.1.7, а):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \quad (1.1.28)$$

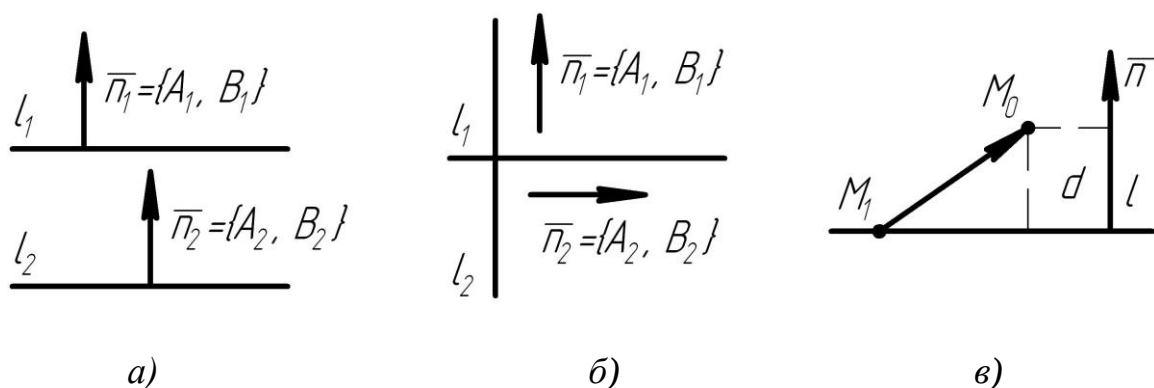


Рис. 1.1.7

3) умова перпендикулярності прямих (рис. 1.1.7, б):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (1.1.29)$$

Нехай задано пряму L рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку $M_0(x_0; y_0)$ (рис.1.1.7, в). Тоді відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначають за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.1.30)$$

Приклад 1.1.8

Задано координати вершин трикутника $A(-1, 2)$, $B(5, -1)$, $C(-4, -5)$. Знайти рівняння сторін AB і BC та їх кутові коефіцієнти, а також рівняння і довжину висоти CD .

Розв'язання:

Рівняння прямої, що проходить через дві точки площини $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ має вигляд (1.1.19). Підставляючи в нього координати точок A і B , отримуємо:

$$\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x+1}{5+1}; \quad \frac{y-2}{-3} = \frac{x+1}{6}; \quad \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{2};$$

$$2y - 4 = -x - 1; \quad x + 2y - 3 = 0 \text{ — рівняння сторони } AB.$$

Кутовий коефіцієнт k_{AB} прямої AB знайдемо, перетворивши отримане рівняння до вигляду рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (1.1.22).

$$\text{Маємо } 2y = -x + 3, \text{ тобто } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \text{ звідки } k_{AB} = -\frac{1}{2}.$$

Аналогічно отримуємо рівняння прямої BC і знаходимо її кутовий коефіцієнт:

$$\frac{y+1}{-5+1} = \frac{x-5}{-4-5}; \quad \frac{y+1}{-4} = \frac{x-5}{-9}; \quad -9y - 9 = -4x + 20;$$

$$4x - 9y - 29 = 0 \text{ — рівняння сторони } BC.$$

$$\text{Далі } -9y = -4x + 29; \quad y = \frac{4}{9}x - \frac{29}{9}, \text{ тобто } k_{BC} = \frac{4}{9}.$$

Для того, щоб скласти рівняння висоти CD , скористаємося рівнянням прямої, що проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом, яке має вигляд (1.1.22) та умовою перпендикулярності прямих AB і CD (1.1.26), яка

у нашому випадку має вигляд: $k_{AB} \cdot k_{CD} = -1$, звідки $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = 2$.

Підставляючи в рівність (1.1.26) замість k значення $k_{CD} = 2$, а замість x_0, y_0 координати точки C , отримуємо:

$$y + 5 = 2(x + 4); \quad y + 5 = 2x + 8; \quad 2x - y + 3 = 0 \text{ — рівняння висоти } CD.$$

Для обчислення довжини висоти CD скористаємося формулою знаходження відстані d від заданої точки до заданої прямої, яка має вигляд (1.1.30). Підставляючи в неї замість x_0, y_0 координати точки C , а замість A, B і C коефіцієнти рівняння прямої AB , отримуємо:

$$d = |CD| = \frac{|-4 + 2(-5) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{17}{\sqrt{5}} = \frac{17\sqrt{5}}{5} \text{ (лін. од.)}.$$

1.1.5 ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

Криві другого порядку — це лінії на площині, рівняння яких другого степеня відносно змінних x та y .

До ліній другого порядку належать: **коло, еліпс, гіпербола та парабола**.

Колом називають множину точок площини, відстані яких від однієї точки цієї площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (1.1.31)$$

описує коло з радіусом R , центр якого міститься у точці $C(x_0; y_0)$ (рис.1.1.8).

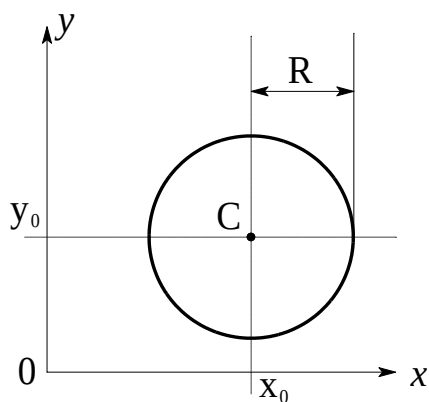


Рис. 1.1.8

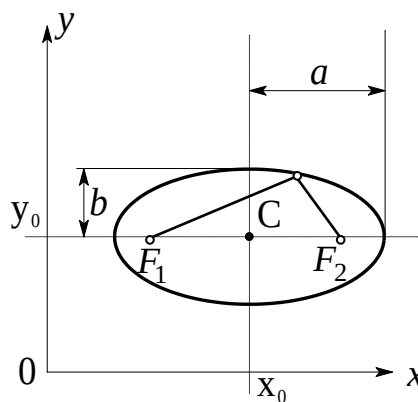


Рис. 1.1.9

У разі, коли центром кола є початок координат $[C(0;0)]$, то рівняння кола

набуває канонічного вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1.1.32)$$

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини (фокусів) є величина стала і більша, ніж відстань між фокусами.

Рівняння еліпса з центром у точці $C(x_0; y_0)$ та півосями a і b має вигляд: (рис. 1.1.9)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (1.1.33)$$

Величини $2a$ і $2b$ називають відповідно *великою* та *малою осями еліпса*. Фокуси еліпса мають координати $F_1(-c; 0)$ та $F_2(c; 0)$.

$F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань, причому

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (a > c). \quad (1.1.34)$$

Міру відхилення еліпса від кола (міру його сплюснутості) характеризує величина ε , яку називають *ексцентриситетом*.

Ексцентриситет еліпса дорівнює відношенню половини фокальної відстані еліпса до довжини його більшої півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad (1.1.35)$$

причому $0 \leq \varepsilon < 1$, оскільки $0 \leq c < a$.

При $\varepsilon = 1$ еліпс вироджується в коло.

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називають *директрисами еліпса*. Вони лежать поза еліпсом. Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.1.36)$$

Гіперболою називають множину всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох заданих точок цієї площини (фокусів) є величиною сталою і меншою від відстані між фокусами.

Рівняння гіперболи з центром у точці $C(x_0; y_0)$ та півосями a і b має вигляд: (рис. 1.1.10)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (1.1.37)$$

Величини $2a$ і $2b$ називають відповідно *дійсною* та *уявною осями гіперболи*.
 $F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань, причому

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (c > a). \quad (1.1.38)$$

Фокуси гіперболи мають координати $F_1(-c; 0)$ та $F_2(c; 0)$.

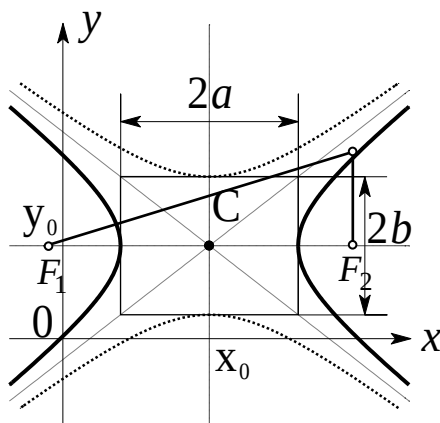


Рис. 1.1.10

Ексцентриситет гіперболи визначають як відношення половини фокальної відстані гіперболи до довжини її дійсної осі: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, причому $\varepsilon > 1$.

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називають *директрисами гіперболи*.

Гіпербола складається з двох віток і має дві асимптоти: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Рівняння $\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$ визначає гіперболу, *спряжену* до гіперболи (1.1.37). Її графік зображено на рис. 1.1.10 пунктирною лінією.

Параболою називають множину всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини (фокуса) і даної прямої (директриси).

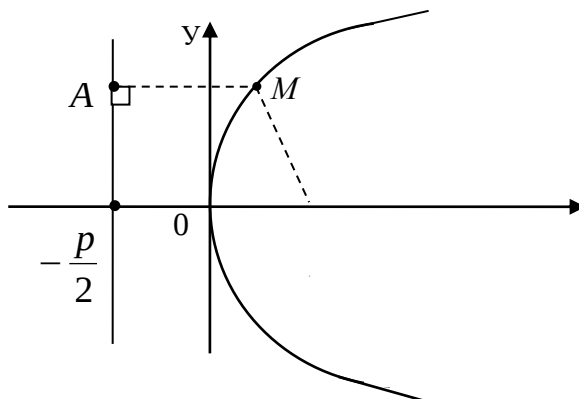


Рис. 1.1.11

На рис. 1.1.11 зображена парабола симетрична осі абсцис з центром у початку координат, яка має координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ та рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$. Така парабола має канонічне рівняння

$$y^2 = 2px, \quad (1.1.39)$$

де p – параметр параболи, який дорівнює відстані фокуса від директриси і характеризує ”ширину“ області, яку обмежує парабола.

Якщо змістити параболу (1.1.39) вздовж осей координат (рис. 1.1.12), тоді відповідно зміниться і її рівняння:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \quad (1.1.40)$$

де $(x_0; y_0)$ – координати вершини.

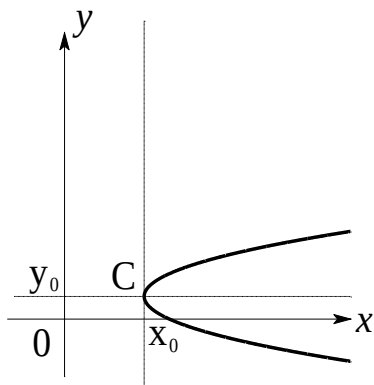


Рис. 1.1.12

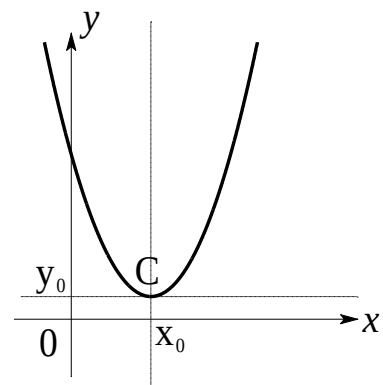


Рис. 1.1.13

Рівняння:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0), \quad (1.1.41)$$

де параметр $p > 0$, описує параболу, зображену на рис. 1.1.13.

Аналогічно рис. 1.1.12 та рис. 1.1.13 парабола з рівнянням $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ буде відповідно спрямована вітками вліво, а парабола з рівнянням $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$ – вітками вниз.

Приклад 1.1.9

Зведіть рівняння кривих другого порядку до канонічного виду та побудуйте ці криві. Вкажіть координати центру (вершини), півосі (радіус) кривих, координати фокусів (для еліпса і гіперболи):

а) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$,

б) $x^2 - y + 4x - 12 = 0$.

Розв'язання:

а) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

Групуємо доданки з однойменними координатами і доповнюємо здобуті вирази до повних квадратів.

Отримаємо:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) - 12 = 0,$$

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 12 = 0,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Маємо канонічне рівняння кола (рис.1.1.14) з центром у точці $C(-2; 3)$ радіуса $R = 5$.

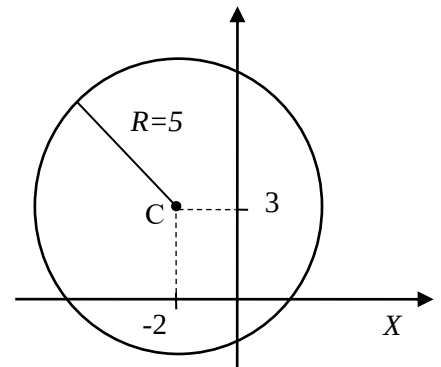


Рис. 1.1.14

б) $x^2 - y + 8x + 12 = 0$.

Зведемо рівняння до канонічного виду:

$$x^2 + 8x = y - 12;$$

$$(x + 4)^2 - 16 = y - 12$$

$$(x + 4)^2 = y + 4.$$

Маємо рівняння параболи з вершиною в точці $O_1(-4; -4)$ і вітками, направленими вгору (рис. 1.1.15).

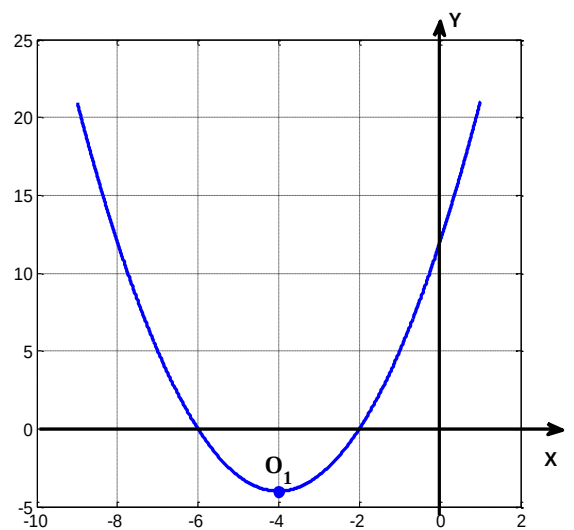


Рис. 1.1.15

1.1.6 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ

Функцією називають змінну y , якщо по деякому правилу або закону кожному значенню змінної x , що належить множині дійсних чисел D , відповідає одне певне значення y , що належить множині дійсних чисел E . Пишуть:

$$y = f(x), \quad (1.1.42)$$

де x – незалежна змінна або аргумент,
 y – залежна змінна або функція.

Множину значень x , для яких функція $y = f(x)$ має зміст називають *областю визначення функції* і позначають $D(f)$. Всі значення, які може приймати функція (змінна y) при всіх x з області визначення функції називають *областю значень функції* і позначають $E(f)$.

Функцію $y = f(x)$ називають **парною**, якщо для неї виконується рівність

$$f(-x) = f(x)$$

і навпаки функція $y = f(x)$ є **непарною**, якщо

$$f(-x) = -f(x).$$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а непарної – відносно початку координат.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають *функцією загального вигляду*.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену в деякому околі точки a крім, можливо, самої точки a . Тоді число A називають **границею функції** $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх значень x (крім, можливо, значення a) з нерівності $|x - a| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, і записують:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (1.1.43)$$

Для обчислення границь функцій використовують наступні теореми, якщо кожна з функцій $f(x)$, $g(x)$ та $r(x)$ має скінчену границю в точці $x_0 = a$:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} C = C, \quad \text{де } C = \text{const},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{r(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} r(x)}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right).$$

Приклад 1.1.10

Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{3x - 1}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^2 + 3}{3 \cdot 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 3}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Функцію $\beta(x)$, задану на всій числовій прямій, при $x \rightarrow a$ називають *нескінченно великою* і записують $\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = \infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|\beta(x)| > M$.

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) і записують $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ ($M > 0$) таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$ ($|x| > M$), виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Між ними існує зв'язок: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\beta(x)} = 0.$

Символічно властивості нескінченно малих та нескінченно великих можна представити наступним чином:

$$\begin{array}{lll} 0 \pm 0 = 0; & \infty + \infty = \infty; & -\infty - \infty = -\infty; \\ 0 \cdot 0 = 0; & \infty \cdot \infty = \infty; & c + \infty = \infty \\ c \cdot 0 = 0, \quad c = const. & c \cdot \infty = \infty; & \end{array}$$

Якщо при обчисленні границі в результаті підстановки в даний вираз граничного значення аргументу отримуються невизначені вирази типу:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]; \quad \left[\frac{0}{0}\right]; \quad [\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0], \quad [1^\infty],$$

то знаходження границі у цих випадках називається розкриттям відповідної невизначеності.

1) Щоб розкрити невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, задану у вигляді відношення

многочленів, необхідно чисельник і знаменник дробу почленно поділити на x у найвищому степені, що присутній у заданому дробі.

Приклад 1.1.11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8}{5 + 8x^2 + x^4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^4} + \frac{8}{x^4}}{\frac{5}{x^4} + \frac{8x^2}{x^4} + \frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{8}{x^4}}{\frac{5}{x^4} + \frac{8}{x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{1} = 0.$$

2) Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, задану у вигляді відношення многочленів,

розкривають шляхом розкладання чисельника і знаменника дробу на лінійні множники з метою скорочення спільного.

Приклад 1.1.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

3) Щоб розкрити невизначеність $[\infty - \infty]$, задану ірраціональними виразами, необхідно чисельник і знаменник дробу помножити на вираз спряжений до заданого.

Приклад 1.1.13

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0. \end{aligned}$$

4) При обчисленні границь виразів, що містять тригонометричні функції широко застосовують **першу важливу границю**:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \quad (1.1.44)$$

Приклад 1.1.14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = \frac{4}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 2.$$

Приклад 1.1.15

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5) Для розкриття невизначеності $\left[1^\infty \right]$ користуються **другою важливою границею**:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad (1.1.45)$$

де e – ірраціональне число, яке наближено дорівнює $e \approx 2,7182 \dots$

Приклад 1.1.16

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}} &= \left[1^\infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{-3}} \right]^{\frac{-3}{x+2} \cdot \frac{x+1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-3}{x+2} \cdot \frac{x+1}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-3x-3}{2x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x-3}{2x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{4}{x}}} = e^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}. \end{aligned}$$

Приклад 1.1.17

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються еквівалентними при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$ і записують $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Якщо $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то справджуються співвідношення:

$$\begin{array}{ll}\sin \alpha(x) \sim \alpha(x); & e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x); \\ \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x); & a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a; \\ \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x); & \log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \cdot \log_a e; \\ \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x); & \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x); \\ 1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}; & [1 + \alpha(x)]^k - 1 \sim k \cdot \alpha(x), \quad k > 0.\end{array}$$

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих не зміниться, якщо їх замінити еквівалентними величинами.

Приклад 1.1.18

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \frac{\operatorname{tg} 8x \sim 8x,}{\sin 2x \sim 2x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{2x} = 4;$$

Приклад 1.1.19

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \frac{\arcsin(x-3) \sim x-3}{\text{при } x \rightarrow 3} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Трапляються випадки, коли границя функції в точці залежить від того, з якого боку (лівого чи правого) змінна x наближається до точки a . Тому виникає потреба у введенні поняття односторонніх границь.

Число A_n називають **правосторонньою границею функції** $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x > a}} f(x) = A_n$, тобто для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх значень x з інтервалу $(a, a + \varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A_n| < \varepsilon$.

Якщо A_n - правостороння границя, то пишуть:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_n \quad \text{або} \quad f(a+0) = A_n.$$

Аналогічно, якщо A_n - лівостороння границя, то пишуть:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_n \quad \text{або} \quad f(a-0) = A_n.$$

Якщо функція $y = f(x)$ у точці a має границю, то виконуються рівності

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a-0) = f(a+0).$$

Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною в точці** x_0 , якщо для неї виконуються наступні умови:

- 1) вона визначена у цій точці і деякому її околі;
- 2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) ця границя дорівнює одностороннім границям і значенню функції в точці x_0 , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Приклад 1.1.20

Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ на неперервність у точці $x_0=1$.

Розв'язання:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1).$$

В точці $x_0=1$ границя функції існує і дорівнює одностороннім границям і значенню функції, а це означає, що розглянута функція неперервна в точці $x_0=1$.

Якщо хоча б одна з умов неперервності функції в точці не виконується, то функція $y = f(x)$ є **розривною в точці** x_0 , а саму точку x_0 називають точкою розриву функції.

Класифікацію точок розриву проводять наступним чином:

1) якщо існують односторонні границі функції в точці x_0 , але вони нерівні між собою, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x),$$

то точку x_0 називають **точкою розриву першого роду**;

2) якщо хоча б одна з односторонніх границь $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ функції в точці x_0 не існує або дорівнює нескінченності, то точку x_0 називають **точкою розриву другого роду**;

3) якщо односторонні границі функції існують і рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в точці x_0 , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

то точку x_0 називають **усувною точкою розриву**.

1.1.7 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ: ЇЇ ОЗНАЧЕННЯ, МЕХАНІЧНИЙ, ГЕОМЕТРИЧНИЙ ТА ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ. ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ ФУНКЦІЙ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$. Візьмемо будь-яке значення x_0 із цього проміжку і надамо йому приросту Δx . Тоді різницю

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

називають *приростом функції в точці x_0* , що відповідає взятому приросту аргументу (рис. 1.1.16).

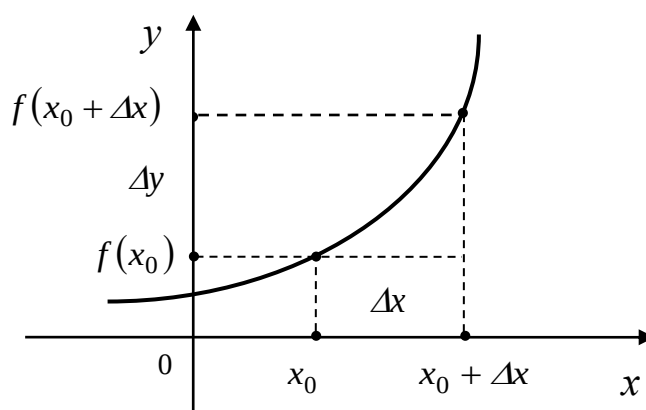


Рис. 1.1.16

Приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень, але так, що значення $x_0 + \Delta x$ не виходить за межі області визначення функції $y = f(x)$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , коли останній прямує до нуля, тобто

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.1.46)$$

Механічний зміст похідної: якщо $S = S(t)$ – закон прямолінійного руху матеріальної точки, то перша похідна $S'(t)$ – це швидкість v точки в момент часу t , тобто

$$v = S'(t).$$

Геометричний зміст похідної: Розглянемо на кривій $y = f(x)$ точки $M_0(x_0; f(x_0))$ та $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо через них пряму M_0M_1 (рис. 1.1.17). Позначимо через α кут її нахилу до додатного напрямку осі Ox . Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$. Нехай $\Delta x \rightarrow 0$, тоді точка M_1 наближатиметься уздовж кривої до M_0 , а відповідна пряма повертатиметься і зрештою займе певне граничне положення, яке називають дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці M_0 . При цьому $\alpha \rightarrow \alpha_0$, де α_0 – кут нахилу дотичної. Отже, маємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_0, \text{ тобто } f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Значення похідної функції $y = f(x)$ в заданій точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції саме в цій точці $(x_0; f(x_0))$.

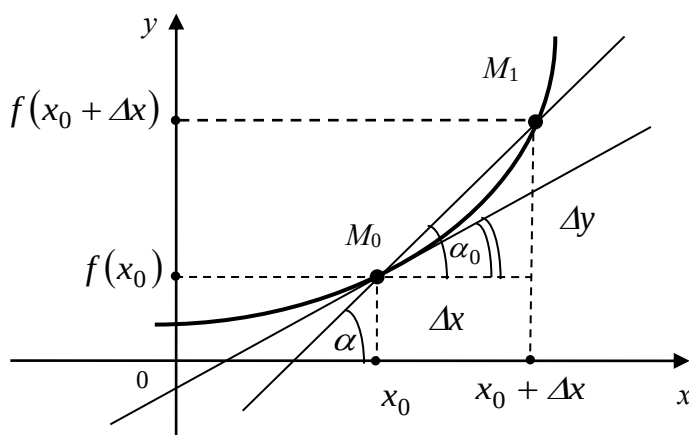


Рис. 1.1.17

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0) має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (1.1.47)$$

де $y_0 = f(x_0)$.

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у кожній точці деякого проміжку I . Тоді кажуть, що вона визначена на I , а її значення у кожній точці дорівнює похідній функції у цій точці. В цьому випадку говорять про похідну як про функцію аргумента x . Позначають її аналогічно до похідної у точці: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$ або просто y' . Іноді необхідно додатково підкреслити, за якою саме змінною (x , t , u і т.п.) обчислюють похідну, тоді пишуть: y'_t , f'_x тощо.

Функцію, що має похідну, називають диференційовною, а процес відшукування похідної – диференціюванням. Для його здійснення користуються правилами та формулами похідних основних елементарних функцій.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

(формули диференціювання основних елементарних функцій):

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (у тому числі: $x' = 1$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$);
2. $(a^x)' = a^x \ln a$ (у тому числі: $(e^x)' = e^x$);
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ (у тому числі: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$);
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Основні правила диференціювання

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовні в точці x функції, а C – стале число. Тоді:

1. Похідна сталої величини дорівнює нулю: $C' = 0$.
2. Сталий множник можна виносити за знак похідної: $(Cu)' = Cu'$.

3. Похідна алгебраїчної суми (різниці) скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних цих функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4. Похідна добутку двох функцій знаходять за формулою:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

5. Похідна частки двох функцій:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

де $v \neq 0$.

6. Похідна складеної функції $y = f(u)$, де $u = g(x)$ дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції, взятої по внутрішньому аргументу $u = \varphi(x)$, і похідної від внутрішньої функції, взятої по незалежній змінній x , тобто

$$y' = f'_u \cdot u'_x.$$

Приклади обчислення похідних звичайних функцій:

$$\begin{aligned} 1) \quad \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - x + 2 \right)' &= \left(\frac{1}{4}x^4 \right)' - \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' + (5x^2)' - (x)' + (2)' = \\ &= \frac{1}{4}(x^4)' - \frac{1}{3}(x^3)' + 5(x^2)' - (x)' + (2)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 1 + 0 = \\ &= x^3 - x^2 + 10x - 1; \end{aligned}$$

$$2) \quad (e^x \cdot \cos x)' = (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x);$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)' &= \frac{(x^3 - 1)' \cdot (x^3 + 1) - (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x^3 + 1) - (x^3 - 1) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{3x^5 + 3x^2 - 3x^5 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Приклади обчислення похідних складених функцій:

$$1) \quad y = \cos(\sqrt{x}).$$

$$y' = -\sin(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$2) \quad y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \left[(x^3 + 3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^3 + 3x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^3 + 3x^2 - 1)' = \\ &= \frac{1}{3} (x^3 + 3x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 + 6x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 - 1)^2}}. \end{aligned}$$

$$3) \quad y = \operatorname{tg}^4(3x).$$

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{tg}^4 3x)' = 4 \cdot \operatorname{tg}^3(3x) \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = 4 \cdot \operatorname{tg}^3(3x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot (3x)' = \\ &= 4 \cdot \operatorname{tg}^3(3x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \frac{12 \operatorname{tg}^3(3x)}{\cos^2(3x)}. \end{aligned}$$

Нехай на інтервалі (a,b) задана диференційована функція $y = f(x)$, тоді її похідна першого порядку y' або $f'(x)$ також є функцією від x .

Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідну називають похідною другого порядку або другою похідною і позначають $f''(x) = [f'(x)]'$.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають похідною третього порядку, тобто за означенням $f'''(x) = [f''(x)]'$.

Похідною n -го порядку називають похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку, тобто $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Похідні порядку вище першого називають *похідними вищих порядків*.

Приклад 1.1.21

Знайти y''' , якщо $y = 4x^3$.

Розв'язання:

$$y' = (4x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2,$$

$$y'' = (12x^2)' = 12 \cdot 2x = 24x,$$

$$y''' = (24x)' = 24.$$

1.1.8 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Нехай задана функція $y = f(x)$ і нехай вона диференційована в точці x , тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

У загальному випадку $f'(x) \neq 0$. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x), \quad \text{де } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

звідки приріст функції

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x. \quad (1.1.48)$$

Диференціалом першого порядку dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx , частину приросту функції $f(x)$ в цій точці, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $dy = dx = x' \Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної x збігається з її приростом. Тому

$$dy = f'(x)dx. \quad (1.1.49)$$

Приклад 1.1.22

Знайти dy , якщо $y = \sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання:

Оскільки $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},$

тоді

$$dy = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Із формули приросту функції (1.1.48) випливає, що при малих Δx правильна наближена формула

$$\Delta y \approx dy \quad \text{або} \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (1.1.50)$$

Формула (1.1.50) дає змогу наближено обчислювати значення функцій.

Диференціалом другого порядку двічі диференційованої функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціала першого порядку, тобто

$$d^2y = d(dy) = f''(x)dx^2. \quad (1.1.51)$$

Диференціалом третього порядку тричі диференційованої функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціала другого порядку, тобто

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3. \quad (1.1.52)$$

Взагалі, **диференціалом n -го порядку** n раз диференційованої функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку, тобто

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^n(x)dx^n. \quad (1.1.53)$$

Приклад 1.1.23

Знайти d^3y , якщо $y = x^5$.

Розв'язання:

Знайдемо похідні $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$.

Тоді згідно формули (1.1.53) маємо $d^3y = 60x^2 dx^3$.

1.1.9 ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ І ПОБУДОВИ ЇЇ ГРАФІКА

1. Зростання та спадання функції на інтервалі

Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з цього інтервалу таких, що $x_1 < x_2$, виконується умова $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо при $x_1 < x_2$ виконується умова $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*. Зростаючі та спадні функції називаються *монотонними*.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a; b)$. Тоді якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; b)$, то функція на цьому інтервалі зростає, якщо ж $f'(x) < 0$ - спадає.

Інтервали монотонності функції можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають *стаціонарними точками*), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними*.

Алгоритм знаходження інтервалів монотонності:

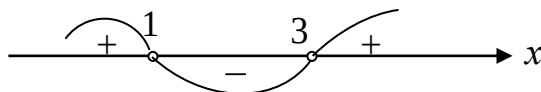
- 1) Встановлюється область визначення функції.
- 2) Знаходиться похідна функції та точки, в яких вона дорівнює нулю (стаціонарні точки).
- 3) Стаціонарними точками область визначення розбивається на інтервали і визначається знак похідної в кожному інтервалі.

Приклад 1.1.24 Знайти інтервали монотонності функції

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Розв'язання: 1) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) $y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.



3)

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 3)$	$(3; +\infty)$
y'	+	-	+
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Дана функція зростає, якщо $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ і спадає при $x \in (1; 3)$.

2. Локальний екстремум функції

Містить 2 поняття: *максимум* або *мінімум* функції.

Значення функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ називається *максимумом*, якщо воно найбільше з усіх можливих значень функції в деякому околі цієї точки.

Аналогічно, значення функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ називається *мінімумом*, якщо воно найменше з усіх можливих значень функції в деякому околі цієї точки.

Необхідна умова існування локального екстремуму: якщо функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ локальний екстремум, то в цій точці похідна функції $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує, тобто точка x_0 є критичною. Проте не всяка критична точка є екстремальною.

Достатня умова існування локального екстремуму:

- якщо функція $f(x)$ неперервна в околі критичної точки x_0 , має похідну в усіх точках цього околу, крім, можливо, самої точки x_0 і при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 - точка локального максимуму ($f(x_0) = Y_{\max}$);
- якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 - точка локального мінімуму ($f(x_0) = Y_{\min}$);
- якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.

Алгоритм дослідження функції на екстремум:

1. Встановлюється область визначення функції.
2. Знаходиться похідна функції та критичні точки (в яких похідна дорівнює нулю або не існує).
3. Досліджується знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення цими критичними точками.
4. За зміною знака похідної при переході через критичні точки зліва направо визначаються точки максимумів і мінімумів і обчислюються значення функції в цих точках.

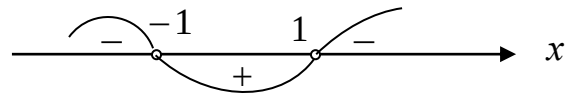
Приклад 1.1.25 Знайти локальні екстремуми функції $y = x - \frac{x^5}{5}$.

Розв'язання: 1) $D(y)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$2) y' = 1 - x^4; \quad y' = 0 \rightarrow (1+x)(1-x)(1+x^2) = 0;$$

$x_1 = -1$ та $x_2 = 1$ - критичні точки.

3)



3).

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$

$$4) \text{ Отже, } y_{\min} = y(-1) = -1 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5},$$

$$y_{\max} = y(1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

3. Найбільше й найменше значення функції на відрізку

Локальних максимумів і мінімумів функція може мати кілька, тоді як найбільше або найменше значення, якщо вони існують, єдині. Вони можуть досягатись чи в критичних точках, чи на кінцях відрізка.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого і найменшого значень. Для знаходження цих значень треба:

- 1) знайти похідну $f'(x)$ і визначити критичні точки даної функції;
- 2) обчислити значення функції $f(x)$ у тих критичних точках, які належать інтервалу $(a; b)$, і в точках $x = a$ та $x = b$;
- 3) серед одержаних значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад 1.1.26 Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на відрізку $[-2, 2]$.

Розв'язання: 1) $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0$;
 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ - критичні точки.

$$2) y(-1) = 1 - 2 + 5 = 4, \quad y(1) = 1 - 2 + 5 = 4, \quad y(0) = 5,$$

$$y(-2) = 16 - 8 + 5 = 13, \quad y(2) = 16 - 8 + 5 = 13.$$

$$3) \max_{x \in [-2, 2]} = y(-2) = y(2) = 13, \quad \min_{x \in [-2, 2]} = y(-1) = y(1) = 4.$$

4. Опуклість та вгнутість кривих. Точки перегину.

Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис. 1.1.18).

Крива $y = f(x)$ називається *вгнутою* на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис. 1.1.19).

Точки, які відділяють опуклу частину кривої від вгнутої, називаються *точками перегину* кривої (рис. 1.1.20)

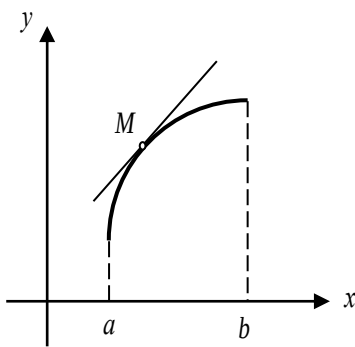


Рис.1.1.18

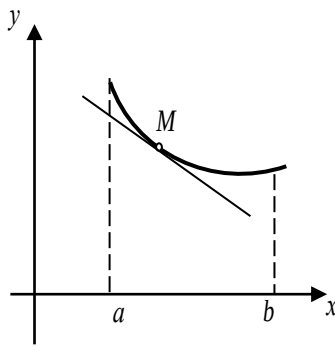


Рис.1.1.19

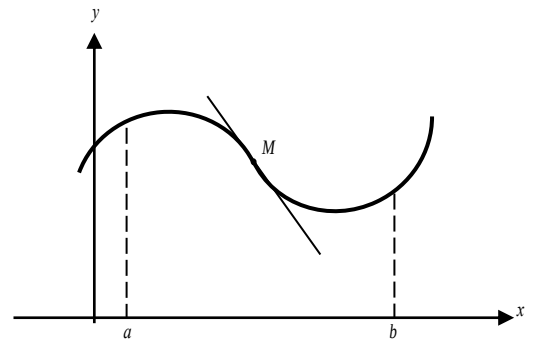


Рис.1.1.20

Для дослідження графіка функції на опуклість та вгнутість застосовують другу похідну.

Достатня умова існування опуклості та вгнутості кривої:

Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ є двічі диференційованою, тоді:

- 1) якщо $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то крива $y = f(x)$ *опукла* на $(a;b)$;
- 2) якщо $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то крива $y = f(x)$ *вгнута* на $(a;b)$.

Вид опуклості - $\cap$; вид вгнутості - $\cup$.

Точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками другого роду.

Достатня умова існування точки перегину: Нехай x_0 - критична точка другого роду кривої $y = f(x)$. Якщо переходячи через точку x_0 друга похідна змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $y = f(x)$.

Алгоритм дослідження функції на опуклість та вгнутість, точки перегину:

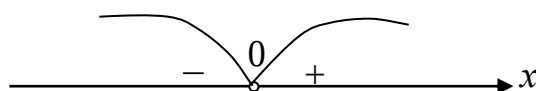
- 1) Встановлюється область визначення функції.
- 2) Знаходиться друга похідна функції та критичні точки другого роду (в яких ця похідна дорівнює нулю або не існує).
- 3) Досліджується знак другої похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення цими критичними точками.
- 4) За зміною знака другої похідної при переході через критичні точки другого роду зліва направо визначаються точки де є перегин і обчислюються значення функції в цих точках.

Приклад 1.1.27 Дослідити функцію $y = x^3$ на опуклість та угнутість.

Розв'язання: 1) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

$$2) y' = 3x^2; \quad y'' = 6x,$$

$$y'' = 0 \rightarrow 6x = 0, \quad x = 0 \quad - \text{критична точки другого роду.}$$



3)

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	0 точка перегину	$\cup$

4) Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $f''(x) < 0$ - крива опукла.

Якщо $x \in (0; +\infty)$ то $f''(x) > 0$ - крива вгнута.

$M(0; 0)$ - точка перегину.

5. Асимптоти кривої

Асимптотою кривої називається пряма, до якої необмежено наближається точка кривої, якщо вона, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Існують типи асимптот: *вертикальні, похилі та горизонтальні.*

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо границя функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$ або хоча б одна з односторонніх границь є нескінченно великою величиною, тобто

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty.$$

Вертикальні асимптоти можливі в точках розриву другого роду або на кінцях області визначення функції.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існують скінченні границі:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad (k \neq 0) \quad \text{і} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Окремим випадком похилої асимптоти при $k = 0$, а $b \neq 0$ є горизонтальна асимптота, рівняння якої $y = b$, причому $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Приклад 1.1.28 Знайти асимптоти функції $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Розв'язання: $D(y): x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1, \quad x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1-0)^2}{1-0-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1+0)^2}{1+0-1} = +\infty.$$

В точці $x = 1$ дана функція має розрив другого роду, отже пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо похилу асимптоту, рівняння якої $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти: $y = x + 1$.

Для повного дослідження функції та побудови її графіка необхідно:

- 1) знайти область існування функції;
- 2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;
- 3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
- 4) знайти точки розриву та дослідити їх характер;
- 5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
- 6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
- 7) знайти асимптоти кривої;
- 8) побудувати графік функції, враховуючи проведені дослідження.

I. Обчислити матричний многочлен:

$$1. A^2 - 6A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad 2. 4A - A^2, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. A^2 + 3A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad 4. A^2 + 5A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$5. A^2 - 2A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad 6. A^2 - 4A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. A^2 + 8A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 8. 3A^2 + A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$9. 2A^2 - A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad 10. A^2 - 6A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$11. A^2 - 2A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 12. 5A^2 + A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. A^2 + 4A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad 14. A^2 - \frac{1}{2}A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$15. 2A^2 + A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 16. A^2 + \frac{1}{3}A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$17. A^2 - 2A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 18. 5A^2 - A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$19. 2A^2 - A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 20. 6A - A^2, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$21. A^2 + \frac{1}{4}A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad 22. A^2 + A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$23. A^2 - 2A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 24. 5A^2 + A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$25. 2A^2 - A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 26. 4A^2 + A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$27. A^2 + A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad 28. A^2 + 3A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$29. A^2 - A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad 30. A^2 - 2A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) за правилом Крамера;

б) методом Гауса;

в) матричним методом.

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases} \quad 9. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
10. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} & 11. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases} & 12. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \\
13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases} & 14. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} & 15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 16; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases} \\
16. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} & 17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases} & 18. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases} \\
19. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9; \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases} & 20. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -2. \end{cases} & 21. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \\
22. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} & 23. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases} & 24. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 17x_3 = -1; \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 12. \end{cases} & 26. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} & 27. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases} \\
28. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} & 29. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases} & 30. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}
\end{array}$$

ІІІ. Задані точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти:

а) довжину прямої AB ;

б) координати точки M , яка ділить відрізок AB у відношенні $m:n$;

в) рівняння прямої l_1 , яка проходить через точку C паралельно прямій AB ;

г) рівняння прямої l_2 , яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB ;

д) точку N , симетричну точці C відносно прямої AB .

1.	$A(2; 1),$	$B(-3; 4),$	$C(2; -5),$	$m : n = 3 : 2.$
2.	$A(-1; 1),$	$B(3; 5),$	$C(3; 3),$	$m : n = 2 : 3.$
3.	$A(5; -1),$	$B(4; -4),$	$C(2; 2),$	$m : n = 4 : 3.$
4.	$A(-4; 1),$	$B(6; 1),$	$C(4; 5),$	$m : n = 2 : 5.$
5.	$A(6; 1),$	$B(-5; 3),$	$C(4; -5),$	$m : n = 3 : 1.$
6.	$A(-1; 1),$	$B(2; 5),$	$C(2; 7),$	$m : n = 1 : 3.$
7.	$A(0; -1),$	$B(4; 1),$	$C(4; 7),$	$m : n = 5 : 3.$
8.	$A(4; -1),$	$B(3; 1),$	$C(2; 4),$	$m : n = 5 : 1.$
9.	$A(1; 1),$	$B(-3; 3),$	$C(4; 2;),$	$m : n = 5 : 4.$
10.	$A(-1; -1),$	$B(-3; 5),$	$C(-3; -4),$	$m : n = 4 : 3.$
11.	$A(3; -1),$	$B(4; -4),$	$C(1; 3),$	$m : n = 6 : 1.$
12.	$A(8; 1),$	$B(6; -1),$	$C(3; -4),$	$m : n = 2 : 5.$
13.	$A(2; 1),$	$B(-5; 5),$	$C(5; -2),$	$m : n = 3 : 1.$
14.	$A(-1; 1),$	$B(-2; 5),$	$C(2; 6),$	$m : n = 5 : 2.$
15.	$A(10; -1),$	$B(1; 1),$	$C(-1; -2),$	$m : n = 2 : 7.$
16.	$A(1; -1),$	$B(-3; 0),$	$C(1; -3),$	$m : n = 7 : 2.$
17.	$A(-2; 1),$	$B(3; 1),$	$C(4; 6),$	$m : n = 3 : 7.$
18.	$A(0; -4),$	$B(-3; 6),$	$C(2; -2;),$	$m : n = 5 : 6.$
19.	$A(-1; -1),$	$B(4; 1),$	$C(1; 4),$	$m : n = 4 : 3.$
20.	$A(-6; 1),$	$B(5; 1),$	$C(3; 2),$	$m : n = 4 : 5.$
21.	$A(3; 1),$	$B(1; -3),$	$C(5; -6),$	$m : n = 3 : 5.$
22.	$A(-1; 9),$	$B(8; 5),$	$C(1; -3),$	$m : n = 1 : 4.$
23.	$A(5; -1),$	$B(-4; 1),$	$C(4; 6),$	$m : n = 5 : 4.$
24.	$A(9; -1),$	$B(3; 8),$	$C(2; -2),$	$m : n = 6 : 5.$
25.	$A(2; 1),$	$B(-3; -7),$	$C(1; 4),$	$m : n = 7 : 4.$
26.	$A(-1; -1),$	$B(-3; 2),$	$C(3; 2),$	$m : n = 2 : 3.$
27.	$A(3; -1),$	$B(1; -4),$	$C(5; -6),$	$m : n = 1 : 6.$
28.	$A(7; -1),$	$B(0; -1),$	$C(6; 4),$	$m : n = 3 : 5.$
29.	$A(6; 1),$	$B(-5; 3),$	$C(4; -5),$	$m : n = 3 : 1.$
30.	$A(-1; 1),$	$B(2; 5),$	$C(2; 7),$	$m : n = 1 : 3.$

IV. Звести задане рівняння кривої до канонічного вигляду, вказати тип кривої та побудувати її:

1. $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$.
2. $9x^2 + 10y^2 - 18x + 40y - 41 = 0$.
3. $5x^2 - 4y^2 + 30x + 8y + 21 = 0$.
4. $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.
5. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.
6. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y - 13 = 0$.
7. $y^2 - 6y + 4x + 13 = 0$.
8. $x^2 - y^2 + 4x - 10y - 25 = 0$.
9. $9x^2 + 36x - 4y + 40 = 0$.
10. $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$.
11. $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 6 = 0$.
12. $x^2 - 6x + 8y - 47 = 0$.
13. $4x^2 + 4x - 8y - 19 = 0$.
14. $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$.
15. $2y^2 + 16y - x + 5 = 0$.
16. $2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y - 9 = 0$.
17. $3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y + 58 = 0$.
18. $2x^2 - 12x + y + 13 = 0$.
19. $x^2 + 10x + 6y + 25 = 0$.
20. $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.
21. $3x^2 - 4y - 12x + 4 = 0$.
22. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$.
23. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.
24. $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$.
25. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$.
26. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.
27. $5x^2 + 5y^2 - 45x + 30y + 9 = 0$.
28. $3x^2 + 3y^2 - 3x - y + 1 = 0$.
29. $2x^2 + y^2 + x - 4y + 2 = 0$.
30. $6x^2 + 6y^2 + 4x - 8y - 2 = 0$.

V. Знайти границі функцій:

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 11x^6 + x^7}{2x^7 + 10x + 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5 - 2x} - 3}{x^2 + 7x + 10}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos 6x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{2/x}$.
2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^4}{3x^4 + x^3 - 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10 - x} - 3}{3x^2 + x - 4}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 8x}{\sin 5x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x}$.
3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 13x^5 - 1}{1 + 2x^2 + 8x^9}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - 2}{x^2 - 1}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 6x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{3/\sin 2x}$.

4. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 + 2x^3 + 5}{5 - 3x^5};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x};$

5. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 2x^3 + 1}{5 - x^8 + 2x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 4x}{1 - \cos^2 4x};$

6. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 5x^3}{x^3 + 4x + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x};$

7. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 7x^3 + 8x^5};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x};$

8. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 7x^2 - 8}{x + 3x^2 + 9x^3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4x^2};$

9. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x + 5}{x + 2x^3 + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{x^2};$

10. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{4x + 6x^2 + 7x^3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x};$

11. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{4x^2 + 5x - 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 3x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x^2\right)^{3/x^2}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2x+5} - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{7}{x}\right)^{4x}.$

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{7-x} - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$

б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{10-2x} - 4}{3x + x^2};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)^{x^3}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{2x+3} - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{3/x}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+1}\right)^{x+1}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x^2 - 4x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x+1)^{5/x}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+7}.$

12. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 + 2x^2}{3x^4 + 7x + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2};$

13. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^7 + 2x^5 + 3}{2x + 6x^5 + x^6};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2}{1 - \cos x};$

14. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 5x^3}{x^2 + 7x - 3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos^2 5x};$

15. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3x + 5x^3}{2x^3 + 6x - 7};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 3x};$

16. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^3 + 2}{5x^3 + x^4};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2};$

17. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^5 + 4x}{1 + x^2 + 3x^3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin x};$

18. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 + 3x^2 + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{x};$

19. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x + 2};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 5x + 4};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 3} \right)^x.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^3} - 1}{x^3 + 7x};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x} \right)^{1 - 3x}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{5x}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{5}}{x^2 - 3x - 28};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{4/x}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{2x};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^x.$

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{5x^2 + 13x + 6};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^x.$

б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{\sqrt{2 + x} - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 3} \right)^{2x - 1}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}.$

$$20. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4x^5 + x^7}{2x^8 + 9x + 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 9x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$21. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 3}{x + x^2 + x^3};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cos 7x}{\sin 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{11/x^2}.$$

$$22. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x + 2}{x + 2x^5 + 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sin 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x-3} - 1};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-5} \right)^{1+5x}.$$

$$23. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 9x^2 + 3x}{18x^2 + 5x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{\sin 3x - \sin 5x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+7} - 2}{x^2 + 5x + 6};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{4/x}.$$

$$24. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^5 + x^3}{2x^4 + 7x + 7};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{4x}.$$

$$25. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{19x + 8x^2 + x^5}{3x^5 + 7x^4 + 2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cos 5x}{\sin 8x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3 - \sqrt{x+8}};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$26. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 5x + 1}{2x^3 + 7x - 5};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \operatorname{tg} 2x}{\sin^2 4x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x+5} - 3};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^x.$$

$$27. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^9 + 3x^5 + 100}{x + 15x^3 + 2x^6};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 7x}{1 - \cos 4x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$28. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^3 + x - 1}{2x^3 + 11x - 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x \cdot \operatorname{tg} 2x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x.$$

$$29. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x^2 + 5x^4}{3x^3 + 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{3 - x}}{x^2 - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x}\right)^{1+x}.$$

$$30. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^4 + 2x}{5x^3 + 2x^5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{1 + 7x} - \sqrt{1 - 7x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{7x \sin 2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 9 \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

VI. Знайти похідну y' від заданих функцій:

$$1. \quad \text{a) } y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x};$$

$$\text{б) } y = \cos 3x \cdot \operatorname{tg} 4x;$$

$$\text{в) } y = 3^{\operatorname{arctg} 5x}.$$

$$2. \quad \text{a) } y = 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}};$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x}{\sin 4x};$$

$$\text{в) } y = e^{\cos^2 3x}.$$

$$3. \quad \text{a) } y = \frac{x^7}{7} - \frac{7}{x^7};$$

$$\text{б) } y = e^{3x} \cdot \operatorname{ctg} 7x;$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg}(\sin 3x).$$

$$4. \quad \text{a) } y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}};$$

$$\text{б) } y = 5^x \cdot \log_2 x;$$

$$\text{в) } y = 4^{\arcsin 5x}.$$

$$5. \quad \text{a) } y = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{x^2};$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln 3x}{e^{4x}};$$

$$\text{в) } y = \arccos(\operatorname{tg} x).$$

$$6. \quad \text{a) } y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$\text{б) } y = x^{10} \cdot \operatorname{tg} 2x;$$

$$\text{в) } y = 7^{\arcsin(x^4)}.$$

$$7. \quad \text{a) } y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$\text{б) } y = e^{4x} \cdot 3^x;$$

$$\text{в) } y = \ln(x + \sin 2x).$$

$$8. \quad \text{a) } y = \frac{x^{100}}{100} + 20;$$

$$\text{б) } y = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x;$$

$$\text{в) } y = \sqrt{1 + \cos x^3}.$$

- | | | | |
|-----|---|--|---|
| 9. | a) $y = \frac{\sqrt{x^5}}{5} - \frac{5}{x};$ | б) $y = \frac{7^x}{\log_7 x};$ | в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1}.$ |
| 10. | a) $y = x(1 - \ln x);$ | б); $y = \frac{e^{\cos x}}{\sin x}$ | в) $y = 2^{\operatorname{tg}^3 x}.$ |
| 11. | a) $y = \frac{x^{15}}{15} - e^{-x};$ | б) $y = \cos x \cdot \operatorname{tg} x;$ | в) $y = \operatorname{arcsin}^3\left(\frac{x}{4}\right).$ |
| 12. | a) $y = 1 - \frac{7}{x^4};$ | б) $y = e^{3x} \cdot 3^{2x};$ | в) $y = \ln^2(\sin x).$ |
| 13. | a) $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x};$ | б) $y = \frac{\sin 2x}{x^5};$ | в) $y = \arccos(x^2 - 3).$ |
| 14. | a) $y = 9 + \frac{2}{\sqrt{x^3}};$ | б) $y = \ln x \cdot x^6;$ | в) $y = e^{\cos^2(1-x)}.$ |
| 15. | a) $y = \frac{x^{14}}{14} - \frac{14}{x^{14}};$ | б) $y = e^{5x} \cdot \operatorname{ctg} 2x;$ | в) $y = 4^{\ln^2 x}.$ |
| 16. | a) $y = 8x^3 + \frac{2}{x^2};$ | б) $y = 5^x \cdot \log_5 x;$ | в) $y = \sin^7(\sqrt{x}).$ |
| 17. | a) $y = \frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^3};$ | б) $y = \frac{\sin x}{\ln x};$ | в) $y = \operatorname{arcsin}(e^{2x}).$ |
| 18. | a) $y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{e^x};$ | б) $y = x \cdot \operatorname{tg} 7x;$ | в) $y = \log_4(\cos 2x).$ |
| 19. | a) $y = 5^x - 10x;$ | б) $y = e^{3x} \cdot \ln x;$ | в) $y = \cos^5 4x.$ |
| 20. | a) $y = \frac{x^9}{9} - 3;$ | б) $y = \sin x \cdot 2^x;$ | в) $y = \ln \frac{x^5}{x^5 + 2}.$ |
| 21. | a) $y = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{5} - e^x;$ | б) $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x;$ | в) $y = \frac{7^x}{\log_2 x}.$ |

22. а) $y = \sqrt{x} + 6\text{ctgx}$; б) $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$; в) $y = \ln(12 - x^3)$.
23. а) $y = \frac{x^{10}}{10} - \frac{x}{4}$; б) $y = x^2 7^x$; в) $y = e^{5x - \text{arccctg}\sqrt{x}}$.
25. а) $y = 2\sqrt{x^5} + 3^x$; б) $y = \frac{\text{ctg}4x}{\sin x}$; в) $y = \ln^4(1 - 2x)$.
26. а) $y = e^{3x} - \frac{x}{2}$; б) $y = e^x \cdot \text{ctgx}$; в) $y = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
27. а) $y = \log_5 x - \frac{2}{x^8}$; б) $y = \frac{\sin 3x}{e^x}$; в) $y = \arcsin^2 x$.
28. а) $y = \sqrt{4x} + 7\cos x$; б) $y = x \cdot \log_9 x$; в) $y = \text{arctg}(e^{-x})$.
29. а) $y = 10 - \frac{5}{x} + e^x$; б) $y = 9x \cdot \text{tg}x$; в) $y = \frac{1}{x + \sqrt{5 + x^2}}$.
30. а) $y = \frac{x}{9} - 3^x$; б) $y = \frac{\sin 4x + 1}{x}$; в) $y = \text{arctg}^3(9x)$.

VII. Дослідити функцію $y = f(x)$ та побудувати її графік:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| 1. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. | 5. $y = \frac{x^2}{x + 1}$. |
| 2. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$. | 6. $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$. |
| 3. $y = \frac{1}{1 + x^2}$. | 7. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$. |
| 4. $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$. | 8. $y = \frac{(x - 1)^2}{x}$. |

$$9. \quad y = \frac{x}{2 - x^2}.$$

$$10. \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^2}.$$

$$11. \quad y = \frac{x}{(1 + x)^2}.$$

$$12. \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

$$13. \quad y = \frac{1}{x^2 + 2x}.$$

$$14. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}.$$

$$15. \quad y = \frac{2x + 1}{x^2}.$$

$$16. \quad y = \frac{1}{x^2 - 9}.$$

$$17. \quad y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}.$$

$$18. \quad y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

$$19. \quad y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x}.$$

$$20. \quad y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}.$$

$$21. \quad y = \frac{x^2}{(x + 1)^2}.$$

$$22. \quad y = \frac{x^3 - 8}{2x^2}.$$

$$23. \quad y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)}.$$

$$24. \quad y = \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$25. \quad y = \frac{x^3}{3 - x^2}.$$

$$26. \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 2x}.$$

$$27. \quad y = \frac{1 - 2x}{x^2 - x - 2}.$$

$$28. \quad y = \frac{4x^3 + 5}{x}.$$

$$29. \quad y = \frac{8x}{(x - 2)^2}.$$

$$30. \quad y = \frac{2 + x^3}{x^2}.$$

1.3. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1

I. Обчислити матричний многочлен: $3A^2 + A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно маємо:

$$\begin{aligned} 1) A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+2+6 & 1-1+0 & 2+1+4 \\ 2-2+3 & 2+1+0 & 4-1+2 \\ 3+0+6 & 3-0+0 & 6+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Виконання операції множення матриць у даному випадку є можливим, оскільки матриця $A_{3 \times 3}$ узгоджена з матрицею $A_{3 \times 3}$. Результатом їх добутку є матриця розміру (3×3) .

$$2) 3A^2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 9 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 21 \\ 9 & 9 & 15 \\ 27 & 9 & 30 \end{pmatrix};$$

3) Оскільки матриці $3A^2$ і A мають однаковий розмір (3×3) , то для них є коректною операція алгебраїчної суми:

$$3A^2 + A = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 21 \\ 9 & 9 & 15 \\ 27 & 9 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27+1 & 0+1 & 21+2 \\ 9+2 & 9-1 & 15+1 \\ 27+3 & 9+0 & 30+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 1 & 23 \\ 11 & 8 & 16 \\ 30 & 9 & 32 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } \begin{pmatrix} 28 & 1 & 23 \\ 11 & 8 & 16 \\ 30 & 9 & 32 \end{pmatrix}.$$

II. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;

б) методом Гауса;

в) матричним методом.

а) Розв'яжемо дану систему рівнянь за *правилом Крамера*.

Знайдемо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 8 - 24 + 12 + 6 + 24 = 1.$$

Оскільки $\Delta = 1 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Для знаходження цього розв'язку обчислимо допоміжні визначники Δx_1 , Δx_2 та Δx_3 :

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 - 18 + 9 + 6 + 6 = -8;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 24 - 24 + 8 + 18 + 24 = -4;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 8 + 8 - 12 - 2 - 24 = -13.$$

Згідно з формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-8}{1} = -8;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-4}{1} = -4;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-13}{1} = -13.$$

Виконаємо перевірку. Для цього підставимо одержаний розв'язок в кожне з рівнянь вихідної системи:

$$\begin{cases} -8 - 4 + 13 = 1; \\ 8 \cdot (-8) + 3 \cdot (-4) - 6 \cdot (-13) = 2; \\ 4 \cdot (-8) - 4 - 3 \cdot (-13) = 3. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2; \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Отримані три вірні рівності, тому розв'язком заданої системи лінійних рівнянь є:

$$x_1 = -8; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = -13.$$

Відповідь: (-8; -4; -13).

б) Розв'яжемо задану систему рівнянь *методом Гауса*.

Перепишемо вихідну систему рівнянь у вигляді розширеної матриці і зведемо її до трикутного вигляду, виконуючи елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-8)+ \\ \swarrow \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \swarrow \\ \times(-4)+ \end{array}} \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-3)+ \\ \times 5+ \\ \swarrow \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \div(-1) \\ \div(-1) \end{array}} \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Повертаючись до вихідної системи, маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 5x_2 - 2x_3 = 6; \\ x_3 = -13. \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -13; \\ x_2 = \frac{6 + 2x_3}{5} = \frac{6 + 2 \cdot (-13)}{5} = -4; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 + 4 - 13 = -8. \end{cases}$$

Відповідь: (-8; -4; -13).

в) Розв'яжемо задану систему рівнянь *матричним методом*.

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Маємо матричне рівняння $A \cdot X = B$, розв'язком якого є $X = A^{-1} \cdot B$.

Далі знайдемо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже, матриця A невинроджена і має обернену матрицю A^{-1} .

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 6 = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 1) = 2;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-24 + 24) = 0;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 8) = -2;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5.$$

Тоді обернена матриця буде:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \text{ а розв'язком системи є:}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: (-8; -4; -13).

III. Задані точки $A(3; -2)$, $B(-1; 4)$, $C(2; -1)$.

Знайти:

а) довжину прямої AB ;

б) координати точки M , яка ділить відрізок AB у відношенні $m : n = 2 : 3$;

в) рівняння прямої l_1 , яка проходить через точку C паралельно прямій AB ;

г) рівняння прямої l_2 , яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB ;

д) точку N , симетричну точці C відносно прямої AB .

Розв'язання:

а) Для знаходження довжини прямої AB скористаємось формулою знаходження відстані між двома точками на площині:

$$\rho(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

б) Координати точки $M(x; y)$, яка ділить відрізок AB у відношенні $|AM| : |MB| = m : n$ знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad \left(\lambda = \frac{m}{n} \right).$$

Маємо $\lambda = \frac{2}{3}$, $A(3; -2)$, $B(-1; 4)$. Тоді:

$$x = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3 - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{7}{5};$$

$$y = \frac{-2 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-2 + \frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}$$

Отже, $M\left(\frac{7}{5}; \frac{2}{5}\right)$

в) Спочатку знайдемо рівняння прямої AB , скориставшись рівнянням прямої, що проходить через 2 задані точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

За умовою $A(3; -2)$, $B(-1; 4)$, тоді :

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-(-2)}{4-(-2)}; \quad \frac{x-3}{-4} = \frac{y-(-2)}{6};$$

$$6(x-3) = -4(y+2);$$

$$6x-18 = -4y-8;$$

$$6x+4y-10=0$$

$3x+2y-5=0$ – рівняння прямої AB .

Визначимо кутовий коефіцієнт цієї прямої (кутовий коефіцієнт прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює $k = -\frac{A}{B}$):

$$k_{AB} = -\frac{3}{2}.$$

Щоб скласти рівняння прямої l_1 , яка проходить через точку C паралельно прямій AB , скористаємося умовою паралельності прямих:

$$k_{l_1} = k_{AB}$$

та рівнянням прямої, що проходить через задану точку C і має заданий кутовий коефіцієнт k :

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

У нашому випадку маємо:

$$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 2);$$

$$2(y+1) = -3(x-2);$$

$$3 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y+1) = 0;$$

$$3x - 6 + 2y + 2 = 0;$$

$3x + 2y - 4 = 0$ – рівняння прямої l_1 .

г) Для знаходження рівняння прямої l_2 , яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB , скористаємося умовою перпендикулярності цих прямих:

$$k_{l_2} \cdot k_{AB} = -1 \quad \text{або} \quad k_{l_2} = -\frac{1}{k_{AB}}$$

і рівнянням прямої, що проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом k :

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Оскільки $k_{AB} = -\frac{3}{2}$, тоді: $k_{l_2} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{2}{3}$.

Маємо: $C(2; -1)$ і тоді $y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$;

$$3(y + 1) = 2(x - 2); \quad 3y + 3 = 2x - 4; \quad 2x - 3y - 7 = 0 \text{ — рівняння прямої } l_2.$$

д) Знайдемо спочатку координати точки D перетину прямих AB і l_2 . Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

Застосуємо формули Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 14 = -29;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 10 = 11;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{29}{13}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{11}{13}.$$

$$D\left(\frac{29}{13}; -\frac{11}{13}\right).$$

Точка D є серединою відрізка CN , тому для координат точок D , C і N виконується умова:

$$x_D = \frac{x_C + x_N}{2};$$

$$y_D = \frac{y_C + y_N}{2},$$

тобто

$$\frac{29}{13} = \frac{2 + x_N}{2};$$

$$-\frac{11}{13} = \frac{-1 + y_N}{2};$$

$$2 + x_N = \frac{58}{13};$$

$$-1 + y_N = -\frac{22}{13};$$

$$x_N = \frac{58}{13} - 2 = \frac{32}{13};$$

$$y_N = -\frac{22}{13} + 1 = -\frac{9}{13}.$$

Отже, $N\left(\frac{32}{13}; -\frac{11}{13}\right).$

IV. Звести задане рівняння кривої до канонічного вигляду, вказати тип кривої та побудувати її:

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0.$$

Розв'язання.

Групуємо члени рівняння з однойменними координатами:

$$(x^2 + 10x) + (y^2 - 4y) + 25 = 0.$$

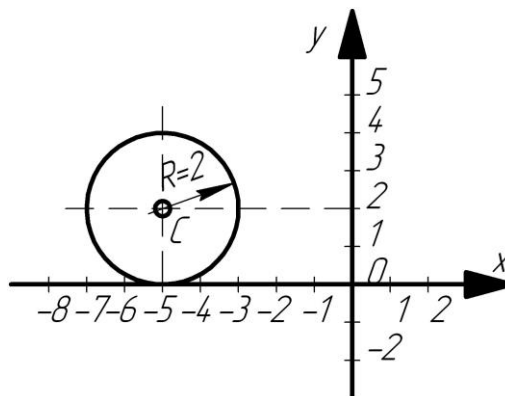
Доповнюємо члени в дужках до повних квадратів:

$$(x^2 + 10x + 25 - 25) + (y^2 - 4y + 4 - 4) + 25 = 0$$

або

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Задане рівняння визначає коло з центром в точці $C(-5; 2)$ радіуса $R = \sqrt{4} = 2$.



V. Знайти границі функцій:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 3x^4 + 1}{x + 6x^2 - x^5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^5}{x^5} + \frac{3x^4}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x}{x^5} + \frac{6x^2}{x^5} - \frac{x^5}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^4} + \frac{6}{x^3} - 1} = -3.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)}{(x-3)} = \frac{(-2)(-2+1)}{(-2-3)} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2}{\cos x \cdot x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{з) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x-1}{x+2} - 1 \right)^{\frac{x+1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x-1-x-2}{x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{x+2} \right)^{-3} \right]^{\frac{-3}{x+2} \cdot \frac{x+1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-3}{x+2} \cdot \frac{x+1}{2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-3x-3}{2x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x-3}{2x+4}} = e^{\frac{-3-\frac{3}{x}}{2+\frac{4}{x}}} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}.
 \end{aligned}$$

VI. Знайти похідну y' для заданих функцій:

$$\text{а) } y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 5x^2 - x + 2.$$

За правилами та формулами диференціювання, маємо:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - x + 2 \right)' = \left(\frac{1}{4}x^4 \right)' - \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' + (5x^2)' - (x)' + (2)' = \\
 &= \frac{1}{4}(x^4)' - \frac{1}{3}(x^3)' + 5(x^2)' - (x)' + (2)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 1 + 0 = \\
 &= x^3 - x^2 + 10x - 1.
 \end{aligned}$$

$$б) y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}.$$

Оскільки функція y є часткою двох функцій, то похідну знайдемо за формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(x^3 - 1)' \cdot (x^3 + 1) - (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x^3 + 1) - (x^3 - 1) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{3x^5 + 3x^2 - 3x^5 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$в) y = tg^4(3x).$$

Це складена функція, тому застосуємо до неї правило похідної складеної функції:

$$\begin{aligned} y' &= (tg^4 3x)' = 4 \cdot tg^3(3x) \cdot [tg(3x)]' = 4 \cdot tg^3(3x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot (3x)' = \\ &= 4 \cdot tg^3(3x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \frac{12tg^3(3x)}{\cos^2(3x)}. \end{aligned}$$

VII. Дослідити функцію $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ та побудувати її графік:

Розв'язання.

1) Область існування функції:

$$x^3 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1.$$

Функція існує для всіх $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Точки перетину графіка функції з осями координат:

Графік функції перетинає вісь Ox при $y = 0$:

$$\frac{x^4}{x^3-1} = 0, \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 0, \\ x^3 - 1 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Графік функції перетинає вісь Oy при $x = 0$:

$$y = \frac{(0)^4}{(0)^3 - 1} = 0.$$

Отже, точка перетину графіка функції з осями координат – $O(0;0)$.

3) Періодичність, парність і непарність:

дана функція неперіодична.

$$\text{Перевіримо парність: } f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^3 - 1} = \frac{x^4}{-x^3 - 1} \neq f(x)$$

Функція ні парна, ні непарна (загального вигляду).

4) Точки розриву та їх характер:

Функція існує для всіх $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, тобто точка $x = 1$ – точка розриву.

Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(1-0)^4}{(1-0)^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(1+0)^4}{(1+0)^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left[\frac{1}{0} \right] = +\infty.$$

Отже, точка $x = 1$ – точка розриву другого роду.

5) Інтервали монотонності, точки екстремуму:

Для цього знайдемо похідну функції $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} \right)' = \frac{4x^3(x^3 - 1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{4x^6 - 4x^3 - 3x^6}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2}.$$

Прирівняємо похідну до нуля і знайдемо точки екстремуму:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2} = 0,$$

$$\begin{cases} x^3(x^3 - 4) = 0, \\ (x^3 - 1)^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0, \\ x^3 - 4 = 0, \\ x^3 - 1 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x^3 = 4, \\ x^3 \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \sqrt[3]{4} \approx 1,59, \\ x_3 \neq 1. \end{cases}$$

Визначимо знаки похідної на інтервалах монотонності:

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -0) \cup (\sqrt[3]{4}; +\infty),$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (0; 1) \cup (1; \sqrt[3]{4}).$$

Знайдемо значення функції в точках екстремуму:

$$y(0) = \frac{(0)^4}{(0)^3 - 1} = 0, \quad y(\sqrt[3]{4}) = \frac{(\sqrt[3]{4})^4}{(\sqrt[3]{4})^3 - 1} = \frac{(\sqrt[3]{4})^4}{4 - 1} = \frac{(\sqrt[3]{4})^4}{3} \approx 2,12.$$

Отримані дані занесемо в таблицю:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1
y'	« + »	0	« - »	Не існує
y		$y_{\max}(0) = 0$		Не існує

x	$(1; \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4}; +\infty)$
y'	« - »	0	« + »
y		$y_{\min}(\sqrt[3]{4}) \approx 2,12$	

Функція зростає при $x \in (-\infty; -0) \cup (\sqrt[3]{4}; +\infty)$ і спадає при $x \in (0; 1) \cup (1; \sqrt[3]{4})$.

Точка максимуму $(0; 0)$, точка мінімуму $(1, 6; 2, 12)$.

6) Інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину:

Знаходимо похідну другого порядку заданої функції:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2} \right)' = \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3 - 1)^2 - 2(x^3 - 1) \cdot 3x^2 \cdot (x^6 - 4x^3)}{(x^3 - 1)^4} = \\ &= \frac{(x^3 - 1)[(6x^5 - 12x^2)(x^3 - 1) - 6x^2(x^6 - 4x^3)]}{(x^3 - 1)^4} = \\ &= \frac{6x^8 - 6x^5 - 12x^5 + 12x^2 - 6x^8 + 24x^5}{(x^3 - 1)^3} = \frac{6x^5 + 12x^2}{(x^3 - 1)^3} = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо другу похідну функції до нуля:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3} = 0,$$

$$\begin{cases} 6x^2(x^3 + 2) = 0, \\ (x^3 - 1)^3 \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 = 0, \\ x^3 + 2 = 0, \\ (x^3 - 1)^3 \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 0, \\ x^3 = -2, \\ x^3 - 1 \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -\sqrt[3]{2} \approx -1,26, \\ x_3 \neq 1. \end{cases}$$

Визначимо знаки другої похідної на інтервалах:

$$f''(x) < 0 \text{ при } x \in (-\sqrt[3]{2}; 0) \cup (0; 1),$$

$$f''(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (1; +\infty).$$

Знайдемо значення функції в критичних точках другого роду:

$$y(0) = \frac{(0)^4}{(0)^3 - 1} = 0,$$

$$y(-\sqrt[3]{2}) = \frac{(-\sqrt[3]{2})^4}{(-\sqrt[3]{2})^3 - 1} = \frac{(-\sqrt[3]{2})^4}{-2 - 1} \approx -0,84.$$

Складемо таблицю:

x	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; 0)$	0
y''	« + »	0	« - »	0
y		$y(-\sqrt[3]{2}) \approx -0,84$		$y(0) = 0$

x	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	« - »	Не існує	« + »
y		Не існує	

Графік функції випуклий при $x \in (-\sqrt[3]{2}; 0) \cup (0; 1)$ та увігнутий при $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (1; +\infty)$.

Точка перегину $A(-1,3; -0,84)$.

7) Асимптоти кривої:

Точка $x = 1$ – точка розриву другого роду, а це означає, що пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо рівняння похилої асимптоти у вигляді $y = kx + b$,

$$\text{де } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \text{а} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

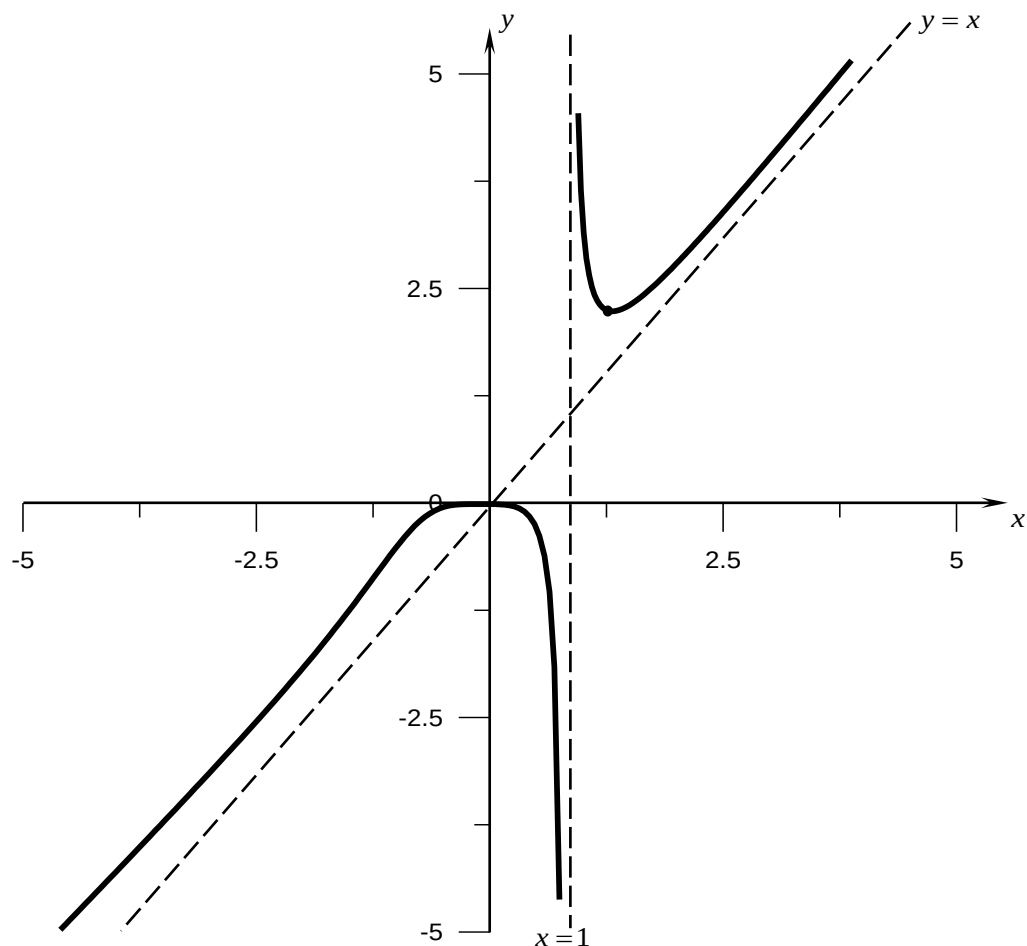
У нашому випадку маємо:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^3 - 1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^4 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x^4 + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3 - 1} = 0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти: $y = x$.

8) Побудова графіка функції на основі проведеного дослідження:



2. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

2.1. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2

2.1.1 ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Задача інтегрального числення є оберненою до задачі диференціального числення і полягає у знаходженні функції, якщо відома її похідна.

Шукану функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$, якщо похідна від шуканої функції дорівнює заданій функції, тобто:

$$F'(x) = f(x), \text{ при } x \in [a, b].$$

Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то і кожна функція виду $F(x) + C$ також буде первісною для $f(x)$.

Наприклад, для функції $f(x) = 2x$, маємо:

$$F(x) = x^2, \quad F_2(x) = x^2 + 1, \quad F_3(x) = x^2 + 2, \quad F_n(x) = x^2 + C.$$

Отже, операцію знаходження первісних називають інтегруванням, а сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для функції $f(x)$ - невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і позначають:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (2.1.1)$$

де $f(x)$ - підінтегральна функція,

$f(x) dx$ - підінтегральний вираз.

Геометрично невизначений інтеграл визначає сукупність кривих, зміщених одна відносно одної вздовж осі Oy .

Таблиця основних інтегралів:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1),$ у тому числі:

$$\int dx = x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ у тому числі $\int e^x dx = e^x + C;$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$

7. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

10. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$ у тому числі $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$ у тому числі $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C;$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. Сталій множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx.$$

2. Невизначений інтеграл від суми (різниці) декількох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від кожної з цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

3. *Інваріантність формули інтегрування:* Вид невизначеного інтеграла не зміниться незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну:

$$\int f(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C, \quad \text{де } u = \varphi(x).$$

Серед основних методів інтегрування виділяють:

1. Метод безпосереднього інтегрування.
2. Метод заміни змінної.
3. Метод інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод базується на використанні таблиці інтегралів та основних властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 2.1.1

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 6x + 8) dx &= \int 3x^2 dx + \int 6x dx + \int 8 dx = 3 \int x^2 dx + 6 \int x dx + 8 \int dx = \\ &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 8x + C = x^3 + 3x^2 + 8x + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.1.2

$$\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx = \int \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Приклад 2.1.3

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C.$$

Метод заміни змінної

Суть цього методу полягає в введенні нової змінної з метою зведення заданого інтеграла до табличного. При знаходженні інтеграла $\int f(x) dx$ застосовують кілька видів підстановок.

Розглянемо заміну $\varphi(x) = t$, де $\varphi(t)$ – неперервно-диференційована функція.

Цю підстановку доцільно виконувати, якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді:

$$f(x) dx = g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx,$$

тоді

$$\int f(x) dx = \int g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int g[\varphi(x)] d\varphi(x) = \int g(t) dt. \quad (2.1.2)$$

У цьому випадку функція $\varphi'(t)$ вводиться під знак диференціала:

$$\varphi'(x)dx = d[\varphi(x)] = dt.$$

Користуючись методом підстановки треба не забувати повертатись вкінці до початкової змінної x .

Приклад 2.1.4

$$\int e^{5x+3} dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x + 3 \\ dt = (5x + 3)' dx \\ dt = 5 dx \\ dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{5x+3} + C.$$

Приклад 2.1.5

$$\int \arctg^5 x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \arctg x \\ dt = (\arctg x)' dx \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\arctg^6 x}{6} + C.$$

Метод інтегрування частинами виражається формулою:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (2.1.3)$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - диференційовні функції.

Тобто, деяку частину підінтегрального виразу замінюють на u , а решту, включаючи диференціал x , замінюють на dv . Тоді диференціал du знаходять диференціюванням, а функцію v – інтегруванням.

Методом інтегрування частинами зручно знаходити такі типи інтегралів:

1) інтеграли вигляду:

$$\int P(x) \cdot e^{kx} dx, \quad \int P(x) \cdot \sin kx dx, \quad \int P(x) \cdot \cos kx dx,$$

де $P(x)$ – многочлен, а k – дійсне число.

У цих інтегралах за u слід узяти множник $P(x)$, а за dv - вираз, що залишився.

Приклад 2.1.6

$$\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} \int u \, dv = uv - \int v \, du; \\ u = x \rightarrow du = dx; \\ dv = \sin x \, dx \rightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{array} \right| = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx =$$
$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

2) інтеграли вигляду:

$$\int P(x) \cdot \ln x \, dx, \quad \int P(x) \cdot \arcsin x \, dx, \quad \int P(x) \cdot \arccos x \, dx, \quad \int P(x) \cdot \operatorname{arctg} x \, dx,$$

де $P(x)$ – многочлен.

У цих інтегралах слід прийняти $dv = P(x)dx$, а за u – вираз, що залишився.

Приклад 2.1.7

$$\int x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} \int u \, dv = uv - \int v \, du; \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}; \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

3) інтеграли вигляду:

$$\int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \, dx, \quad \int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \, dx,$$

де α, β – дійсні числа.

Тут після двократного застосування методу інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. З цього рівняння і знаходять шуканий інтеграл.

2.1.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА. ОСНОВНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

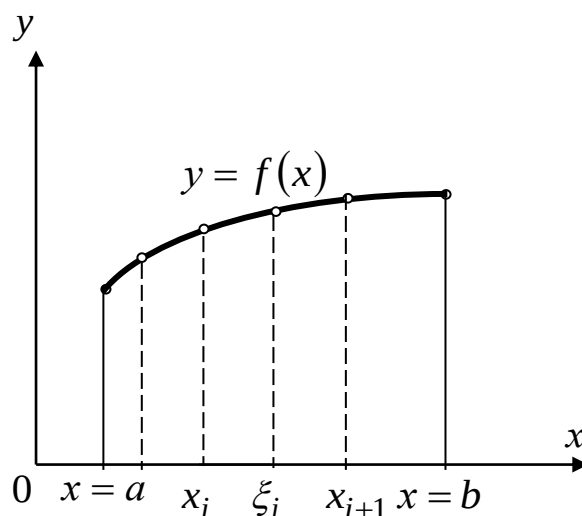


Рис. 2.1.1

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ і виберемо на кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$ довільну точку ξ_i (рис. 2.1.1). Складемо суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Число I_n називається інтегральною сумою функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і вибору точок ξ_i . Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\lambda \rightarrow 0$, що не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a, b]$, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$, тобто

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (2.1.4)$$

Число a називають нижньою, а число b - верхньою межею визначеного інтеграла.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: Визначений інтеграл

$\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ - невід'ємна і неперервна функція, чисельно дорівнює площі

криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу відрізком $[a; b]$ осі Ox , з боків прямими $x = a$ та $x = b$ ($a < b$).

Основні властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) декількох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від кожної з цих функцій:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

3. Інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то знак інтеграла зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

5. Якщо відрізок інтегрування $[a, b]$ розбити т.С на два відрізки $[a, c]$ і $[c, b]$, тоді інтеграл розіб'ється на суму двох інтегралів на відрізках $[a, c]$ та $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Для обчислення визначеного інтеграла використовують формулу **Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (2.1.5)$$

де $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$.

При цьому використовують всі ті ж самі методи, що і для невизначених інтегралів.

Метод безпосереднього інтегрування визначених інтегралів

Приклад 2.1.8

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2.$$

Приклад 2.1.9

$$\begin{aligned} \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \Big|_1^8 = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} \Big|_1^8 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \Big|_1^8 = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1}) = \\ &= \frac{3}{2} (4 - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 2.1.10

$$\begin{aligned} \int_1^2 (1 + 2x - 3x^2) dx &= \int_1^2 dx + 2 \int_1^2 x dx - 3 \int_1^2 x^2 dx = \left(x + x^2 - x^3 \right) \Big|_1^2 = \\ &= (2 + 4 - 8) - (1 + 1 - 1) = -2 + 1 = -1. \end{aligned}$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі виражається формулою:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (2.1.6)$$

де $\varphi(t)$ - функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $\alpha \leq t \leq \beta$; $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Заміняючи змінну у визначеному інтегралі, знаходять також нові межі інтегрування, і надалі вже не повертаються до початкової змінної.

Приклад 2.1.11

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \left. \begin{array}{l} t = 11 + 5x \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{dt}{5} \\ a = -2 \rightarrow \alpha = 11 + 5 \cdot (-2) = 1 \\ b = -1 \rightarrow \beta = 11 + 5 \cdot (-1) = 6 \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int_1^6 \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{5} \int_1^6 t^{-3} dt =$$
$$= \frac{1}{5} \frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^6 = -\frac{1}{10t^2} \Big|_1^6 = -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{1^2} \right) = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{36} - 1 \right) = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{-35}{36} \right) = \frac{7}{72}.$$

Приклад 2.1.12

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left. \begin{array}{l} t = 1 + \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ a = 1 \rightarrow \alpha = 1 + \ln 1 = 1 \\ b = e^3 \rightarrow \beta = 1 + \ln e^3 = 1 + 3\ln e = 1 + 3 = 4 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_1^4 =$$
$$= 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2 \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ - неперервно диференційовні функції на $[a, b]$, то справедлива формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2.1.7)$$

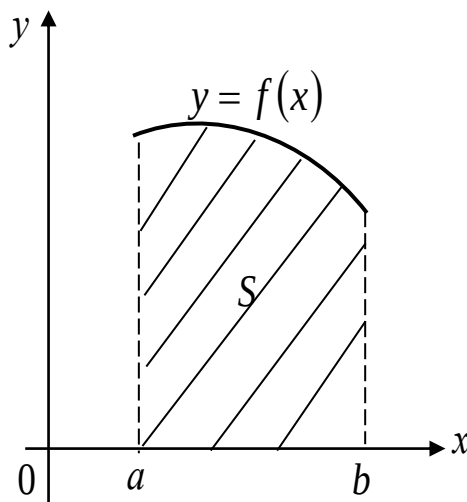
Приклад 2.1.13

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x = e^x \end{array} \right| = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$$
$$= xe^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e^x(x-1) \Big|_0^1 = e(1-1) - e^0(0-1) = 1.$$

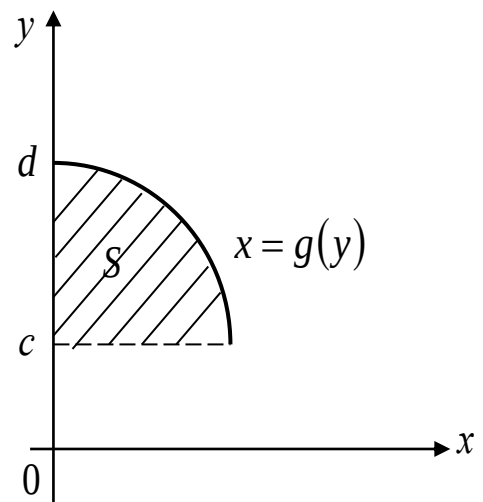
2.1.3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Нехай плоска фігура обмежена кривою $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0$ неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ та віссю абсцис $y = 0$ (рис. 2.13.2 а). Тоді площу криволінійної трапеції обчислюють за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.1.8)$$



а)



б)

Рис. 2.1.2

Якщо плоска фігура обмежена кривою $x = g(y)$, де $g(y) \geq 0$ - неперервна на відрізку $[c; d]$ функція, горизонтальними прямими $y = c$ і $y = d$ та віссю ординат $x = 0$ (рис. 2.1.2 б). то її площу обчислюють за формулою:

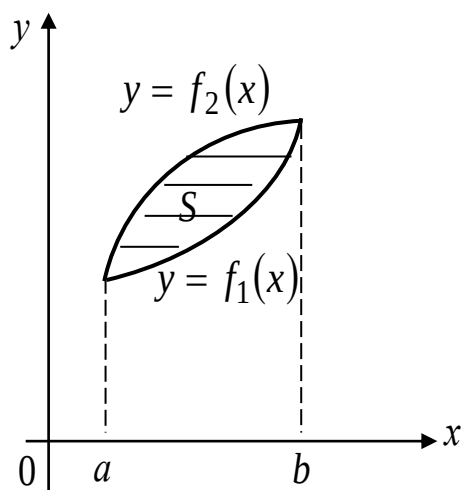
$$S = \int_c^d g(y) dy. \quad (2.1.9)$$

Площу плоскої фігури, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$ і кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 2.1.3 а). обчислюють за формулою:

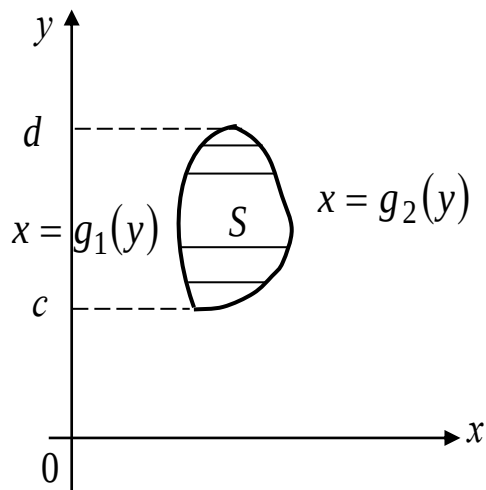
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (2.1.10)$$

Площу плоскої фігури, обмеженої прямими $y = c$ і $y = d$ і кривими $x = g_1(y)$ і $x = g_2(y)$, де $g_1(y) \leq g_2(y)$, $y \in [c; d]$ (рис. 2.1.3 б), обчислюють за формулою :

$$S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)] dy. \quad (2.1.11)$$



а)



б)

Рис. 2.1.3

Приклад 2.1.14

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = 4 - x^2$ та $y = 0$.

Розв'язання:

Знайдемо абсциси точок перетину заданих кривих:

$$4 - x^2 = 0, \quad x^2 = 4, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

Зобразимо фігуру, площу якої треба знайти (рис. 2.1.4):

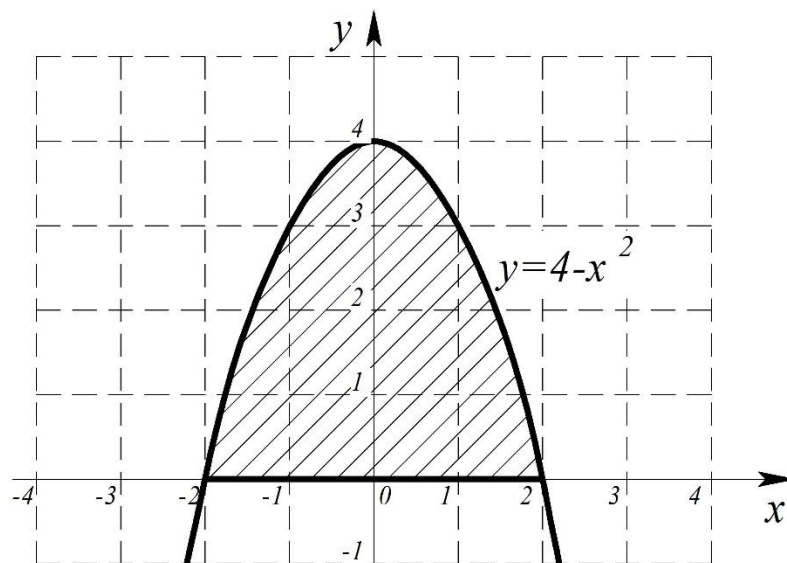


Рис. 2.1,4

У нашому випадку маємо:

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Нехай $S(x)$ - площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox у точці з абсцисою x , $x \in [a; b]$, причому $S(x)$ - неперервна функція на відрізку $[a; b]$ (рис. 5.1.5, а). Тоді об'єм тіла V за площею паралельного перерізу цього тіла $S(x)$ обчислюють за формулою:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (2.1.12)$$

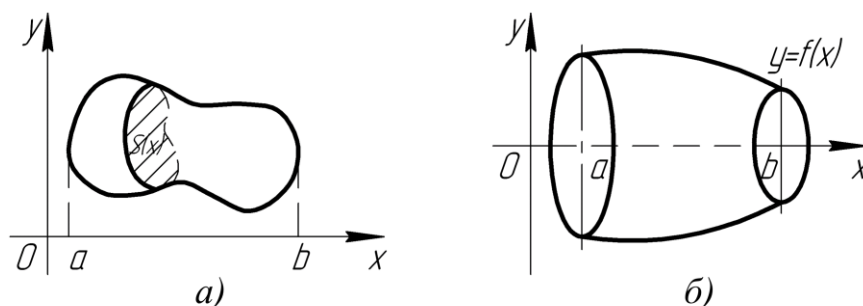


Рис. 2.1.5.

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, ($f(x) \geq 0$), віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$) (рис. 5.1.5, б) обчислюють за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2.1.13)$$

Якщо ж тіло утворюється при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = \phi(y)$ та прямими $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), тоді об'єм тіла обертання дорівнює:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy. \quad (2.1.14)$$

Об'єм тіла V , утвореного обертанням навколо осі Ox фігури $a \leq x \leq b$, $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, де $f_1(x)$ та $f_2(x)$ - неперервні невід'ємні функції, дорівнює:

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx. \quad (2.1.15)$$

Об'єм тіла V , утвореного обертанням навколо осі Oy фігури $a \leq x \leq b$, $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, де $f_1(x)$ та $f_2(x)$ - неперервні невід'ємні функції, дорівнює:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (2.1.16)$$

Приклад 2.1.15

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, розташованої в першій координатній чверті і обмеженої лініями:

$$y = 2x^2; \quad y + x = 3.$$

Розв'язання:

Знайдемо абсциси точок перетину параболи $y = 2x^2$ та прямої $y + x = 3$:

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = -x + 3, \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -3/2. \end{cases}$$

$x_2 = -3/2$ не задовольняє умови задачі, бо не належить першій координатній чверті.

Зобразимо криволінійну трапецію, що за умовою обертається навколо осі Ox (рис. 2.1.6):

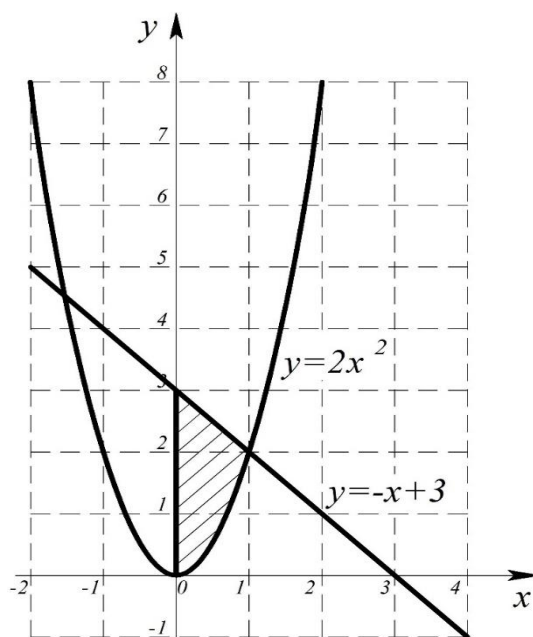


Рис. 2.1.6.

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, розташованої в першій координатній чверті і обмеженої заданими лініями (рис. 2.1.6), знаходимо за формулою:

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx = \\
 &= \pi \int_0^1 [(-x+3)^2 - (2x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (9 - 6x + x^2 - 4x^4) dx = \\
 &= \pi \left(9x - 3x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \pi \left(9 - 3 + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(6 + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{90 + 5 - 12}{15} \right) = \frac{83}{15} \text{ (куб. од.)}
 \end{aligned}$$

2.1.4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО РОДУ

Це інтеграли, у яких або підінтегральна функція має нескінченний розрив на відрізьку інтегрування або інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

Невласні інтеграли першого роду (мають одну або дві нескінченні межі інтегрування):

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \text{число} \rightarrow \int \text{збіжний}, \\ \infty \rightarrow \int \text{розбіжний}, \\ \text{не існує} \rightarrow \int \text{розбіжний}. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \text{число} \rightarrow \int \text{збіжний}, \\ \infty \rightarrow \int \text{розбіжний}, \\ \text{не існує} \rightarrow \int \text{розбіжний}. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx, \quad \text{де } c \text{ - довільне дійсне}$$

число.

Приклад 2.1.16

Обчислити невластний інтеграл першого роду і встановити характер його збіжності:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Розв'язання:

Згідно з означенням маємо:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Геометрично це означає, що площа необмеженої криволінійної трапеції скінченна і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

Невластні інтеграли другого роду (інтеграли, в яких підінтегральна функція має нескінченний розрив у середині відрізка інтегрування).

Якщо $x = a$ – особлива точка, то невластний інтеграл визначають так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \begin{cases} \text{число} \rightarrow \int \text{збіжний}, \\ \infty \rightarrow \int \text{розбіжний}, \\ \text{не існує} \rightarrow \int \text{розбіжний}. \end{cases}$$

Якщо $x = b$ – особлива точка, то невластний інтеграл визначають так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \begin{cases} \text{число} \rightarrow \int \text{збіжний}, \\ \infty \rightarrow \int \text{розбіжний}, \\ \text{не існує} \rightarrow \int \text{розбіжний}. \end{cases}$$

Якщо $x = c$ – особлива точка, причому $a < c < b$, тоді за означенням:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Якщо границі у правій частині існують одночасно і є скінченними, то невластний інтеграл вважають *збіжним*. Якщо ж принаймні одна із границь не існує або нескінченна, то – *розбіжним*.

Приклад 2.1.17

Дослідити інтеграл на збіжність:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Розв'язання:

Даний інтеграл має особливу точку $x=1$, оскільки $f(1)=\infty$. Тоді згідно з означенням маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2.1.18

Дослідити інтеграл на збіжність:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

Розв'язання:

Даний інтеграл має особливу точку $x=1$, оскільки $f(1)=\infty$. Тоді згідно з означенням маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 - 2^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{5} - \ln \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл розбігається.

2.1.5. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ.

ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ ТА ГРАДІЄНТ

При дослідженні явищ природи дуже часто виявляється, що одна змінна величина залежить від багатьох інших змінних. Наприклад, площа S прямокутника залежить від двох величин – його сторін x і y , а об'єм V прямокутного паралелепіпеда залежить від трьох величин – довжин ребер x , y та z . Для вивчення таких величин служить поняття функції кількох змінних.

Уточнення поняття функції у випадку кількох незалежних змінних почнемо з найпростішого випадку, коли цих змінних дві.

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y) . Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине дійсне число z , то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y і записують:

$$z = f(x, y). \quad (2.1.17)$$

При цьому змінну z називають залежною змінною (функцією), а x та y – незалежними змінними (аргументами).

Множину пар (x, y) , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають областю визначення цієї функції і позначають $D(f)$. Область значень функції $z = f(x, y)$ позначають $E(f)$. Областю визначення такої функції може бути або вся площина Oxy , або деяка її частина.

Приклад 2.1.19

Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

Розв'язання:

Областю визначення даної функції є множина таких точок (x, y) , для яких вираз $\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ має зміст, тобто множина точок, для яких $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0$ або $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$. Отже, область визначення заданої функції – це замкнена область обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Нехай на деякій множині D задано функцію $z = f(x, y)$ і точку $M(x, y) \in D$. Підставляючи координати цієї точки у функцію, знаходимо значення функції z .

Тоді **повним приростом** функції $z = f(x, y)$ у точці M називають функцію

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (2.1.18)$$

Частинним приростом функції $z = f(x, y)$ у точці M , який відповідає приросту Δx аргумента x , називають функцію

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (2.1.19)$$

Аналогічно, частинний приріст функції $z = f(x, y)$ за змінною y обчислюють за формулою

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (2.1.20)$$

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad (y = \text{const}), \quad (2.1.21)$$

то її називають *частинною похідною* функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ за змінною x і позначають z'_x , f'_x або $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогічно,

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \quad (x = \text{const}) \quad (2.1.22)$$

є частинною похідною функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ за змінною y .

Частинні похідні функції кількох змінних обчислюють аналогічно похідним функціям однієї з цих змінних. Внаслідок цього всі правила і формули диференціювання, які розглядались у цьому методичному посібнику в

пункті 1.1.7 для похідних функції однієї змінної, мають місце і при знаходженні частинних похідних функції кількох змінних. Слід лише пам'ятати, що в усіх цих правилах і формулах при знаходженні частинної похідної по будь-якому одному аргументу всі інші аргументи вважаються сталими величинами.

Приклад 2.1.20

Знайти частинні похідні функції $z = 2^{x^2-y}$.

Розв'язання:

Припустивши, що y є сталою величиною, знаходимо частинну похідну від даної функції по аргументу x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2^{x^2-y}\right)'_x = 2^{x^2-y} \ln 2 \cdot (x^2 - y)'_x = 2^{x^2-y} \ln 2 \cdot (2x - 0) = 2^{x^2-y+1} x \ln 2.$$

Тут були використані відомі формули диференціювання:

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{та} \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Тепер вважаючи, що незалежна змінна x є сталою, знаходимо частинну похідну від даної функції по аргументу y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2^{x^2-y}\right)'_y = 2^{x^2-y} \ln 2 \cdot (x^2 - y)'_y = 2^{x^2-y} \ln 2 \cdot (0 - 1) = -2^{x^2-y} \ln 2.$$

Частинними похідними 2-го порядку функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. За означенням частинні похідні другого порядку від функції $z = f(x, y)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ або } z''_{xx}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ або } z''_{yy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ або } z''_{xy}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ або } z''_{yx}, \end{aligned}$$

де дві останні рівності називають **мішаними похідними**.

Теорема про мішані похідні: Якщо в околі точки $M(x, y)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то вони рівні між собою.

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Приклад 2.1.21

Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = 2x^4 y^3 + \sin 2y - x^2$.

Розв'язання:

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку від заданої функції.

Для цього, припустивши, що y є сталою, обчислюємо частинну похідну першого порядку від даної функції по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= (2x^4 y^3 + \sin 2y - x^2)'_x = (2x^4 y^3)'_x + (\sin 2y)'_x - (x^2)'_x = \\ &= 2y^3 (x^4)'_x + (\sin 2y)'_x - (x^2)'_x = 2y^3 \cdot 4x^3 + 0 - 2x = 8x^3 y^3 - 2x. \end{aligned}$$

Тепер вважаючи, що змінна x є сталою, знаходимо частинну похідну першого порядку від даної функції по y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= (2x^4 y^3 + \sin 2y - x^2)'_y = (2x^4 y^3)'_y + (\sin 2y)'_y - (x^2)'_y = \\ &= 2x^4 (y^3)'_y + (\sin 2y)'_y - (x^2)'_y = 2x^4 \cdot 3y^2 + 2\cos 2y - 0 = \\ &= 6x^4 y^2 + 2\cos 2y. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюємо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = (8x^3 y^3 - 2x)'_x = 8y^3 (x^3)'_x - 2(x)'_x = \\ &= 8y^3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 1 = 24x^2 y^3 - 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = (6x^4 y^2 + 2 \cos 2y)'_y = 6x^4 (y^2)'_y + 2(\cos 2y)'_y = \\ &= 6x^4 \cdot 2y - 2 \sin 2y = 12x^4 y - 4 \sin 2y;\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = (8x^3 y^3 - 2)'_y = 8x^3 (y^3)'_y - 2' = 8x^3 \cdot 3y^2 - 0 = 24x^3 y^2;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = (6x^4 y^2 + 2 \cos 2y)'_x = 6y^2 (x^4)'_x + (\cos 2y)'_x = \\ &= 6y^2 \cdot 4x^3 + 0 = 24x^3 y^2.\end{aligned}$$

Твердження теореми про мішані похідні – підтверджене і в даному випадку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24x^3 y^2.$$

Градiєнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають вектор, який вказує напрям максимального зростання цієї функції у цій точці. Координатами цього вектора є значення частинних похідних функції $z = f(x, y)$ у заданій точці $M_0(x_0; y_0)$, тобто

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} \vec{j}, \quad (2.1.23)$$

де $\vec{i}, \vec{j}$ – орти.

Похідну функції $z = f(x, y)$ за напрямом вектора $\vec{l} = (l_x, l_y)$ обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta, \quad (2.1.24)$$

де $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, причому $|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ – довжина вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом $\vec{l}$ функції $z = f(x, y)$ та градієнт пов'язані співвідношенням:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{\text{grad } z} \cdot \vec{l}. \quad (2.1.25)$$

Приклад 2.1.22.

Знайти похідну функції $z = \arctg xy$ у точці $(1; 1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

Розв'язання:

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку від заданої функції:

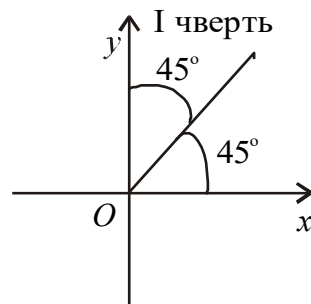
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\arctg xy)'_x = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot yx' = \frac{y}{1 + x^2 y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\arctg xy)'_y = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot xy' = \frac{x}{1 + x^2 y^2}.$$

Обчислюємо значення частинних похідних у точці $(1; 1)$:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1;1)} = \frac{y}{1 + x^2 y^2} \Big|_{(1;1)} = \frac{1}{1 + 1^2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1;1)} = \frac{x}{1 + x^2 y^2} \Big|_{(1;1)} = \frac{1}{1 + 1^2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2}$$



Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{1}{2} \cos 45^\circ + \frac{1}{2} \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Якщо кожній трійці чисел $(x, y, z) \in D$ за певним правилом відповідає єдине число u , то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x , y та z , і записують

$$u = f(x, y, z). \quad (2.1.26)$$

Тут u – залежна змінна (функція), а x , y та z – незалежні змінні (*аргументи*).

Аналогічно **для функції трьох змінних** $f(x, y, z)$ **похідна за напрямом вектора** $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ подається у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (2.1.27)$$

де $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$,
 $|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$ – довжина вектора $\vec{l}$.

Подібно до того, як частинні похідні u'_x , u'_y , u'_z показують швидкість зміни функції u у напрямку відповідних осей координат, так і похідна $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ показує швидкість зміни скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$. Абсолютна величина похідної $\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|$ відповідає значенню цієї швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $u(x, y, z)$ у напрямі $\vec{l}$. Якщо похідна за напрямком додатна, то функція у цьому напрямку зростає, якщо ж похідна від'ємна, то спадає.

Гradient функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ визначається так:

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \vec{k}, \quad (2.1.28)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні орти.

Взагалі для функції $v = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може існувати m частинних похідних першого порядку: $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_m}$.

Частинну похідну $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ знаходять як звичайну похідну функції $v = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за змінною x_k , вважаючи решту змінних сталими.

Для функції $v = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може існувати m^2 частинних похідних другого порядку: $\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k} \right)$, де $i, k = 1, 2, \dots, m$. Аналогічно вводяться поняття частинних похідних третього і вищих порядків.

Приклад 2.1.23.

Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ у точці $M_0(0, 1, 2)$.

Розв'язання:

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ у точці M_0 .

При обчисленні $\frac{\partial u}{\partial x}$ вважаємо сталими величинами змінні y та z . Так отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2)'_x + (y^2)'_x + (z^2)'_x - 2yz \cdot (x)'_x = 2x - 2yz = 2(x - yz).$$

При обчисленні $\frac{\partial u}{\partial y}$ вважаємо сталими величинами змінні x та z :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2)'_y + (y^2)'_y + (z^2)'_y - 2xz \cdot (y)'_y = 2y - 2xz = 2(y - xz).$$

При знаходженні $\frac{\partial u}{\partial z}$ вважаємо сталими величинами змінні x та y :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2)'_z + (y^2)'_z + (z^2)'_z - 2xy \cdot (z)'_z = 2z - 2xy = 2(z - xy).$$

Обчислимо значення знайдених частинних похідних у точці $M_0(0, 1, 2)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 2(0 - 1 \cdot 2) = -4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = 2(1 - 0 \cdot 2) = 2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 2(2 - 0 \cdot 1) = 4.$$

За формулою (2.1.28) визначаємо вектор – градієнт функції u :

$$\text{grad } u = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

2.1.6. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ

Для розв'язування двовимірних задач, тобто задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що базується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування.

Розглянемо таку задачу.

Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \quad (\min \text{ а\bar{т}о } \max) \quad (2.1.29)$$

3a умов

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_3, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_m. \end{array} \right. . \quad (2.1.30)$$

де a_{ij}, b_i ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) - задані числа.

Припустимо, що система (2.1.30) за умов:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (2.1.31)$$

сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (2.1.29) кожне i -те обмеження-нерівність (2.1.30) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Системою обмежень (2.1.30) описується спільна частина, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють усі обмеження задачі.

Таку множину точок називають **многокутником розв'язків, або областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування.**

Умова (2.1.310) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $C_1X_1 + C_2X_2 = \text{const}$.

Сформулюємо деякі властивості задачі лінійного програмування, що використовуються під час її графічного розв'язування.

Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній з вершин многокутника розв'язків. А якщо цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині многокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підставлення координат якої в (2.1.29) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з наступних кроків:

1. Побудова многокутника допустимих розв'язків.

Для цього:

- а) будують прямі, рівняння яких дістають заміною в обмеженнях задачі (2.1.29) знаків нерівностей на знаки рівностей;
- б) визначають півплощин, що відповідають кожному обмеженню задачі;
- в) знаходять многокутник розв'язків як перетин побудованих півплощин.

2. Визначення вектора градієнта заданої функції $\vec{n} = \text{grad } z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)$,

що вказує напрям найшвидшого зростання функції z .

3. Побудова лінії рівня, рівняння якої $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$. Вона перпендикулярна до вектора градієнта.

4. Переміщуючи лінію рівня в напрямі вектора градієнта $\vec{n}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходять вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.

5. Визначення координат точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення і обчислення екстремального значення цільової функції в цій точці.

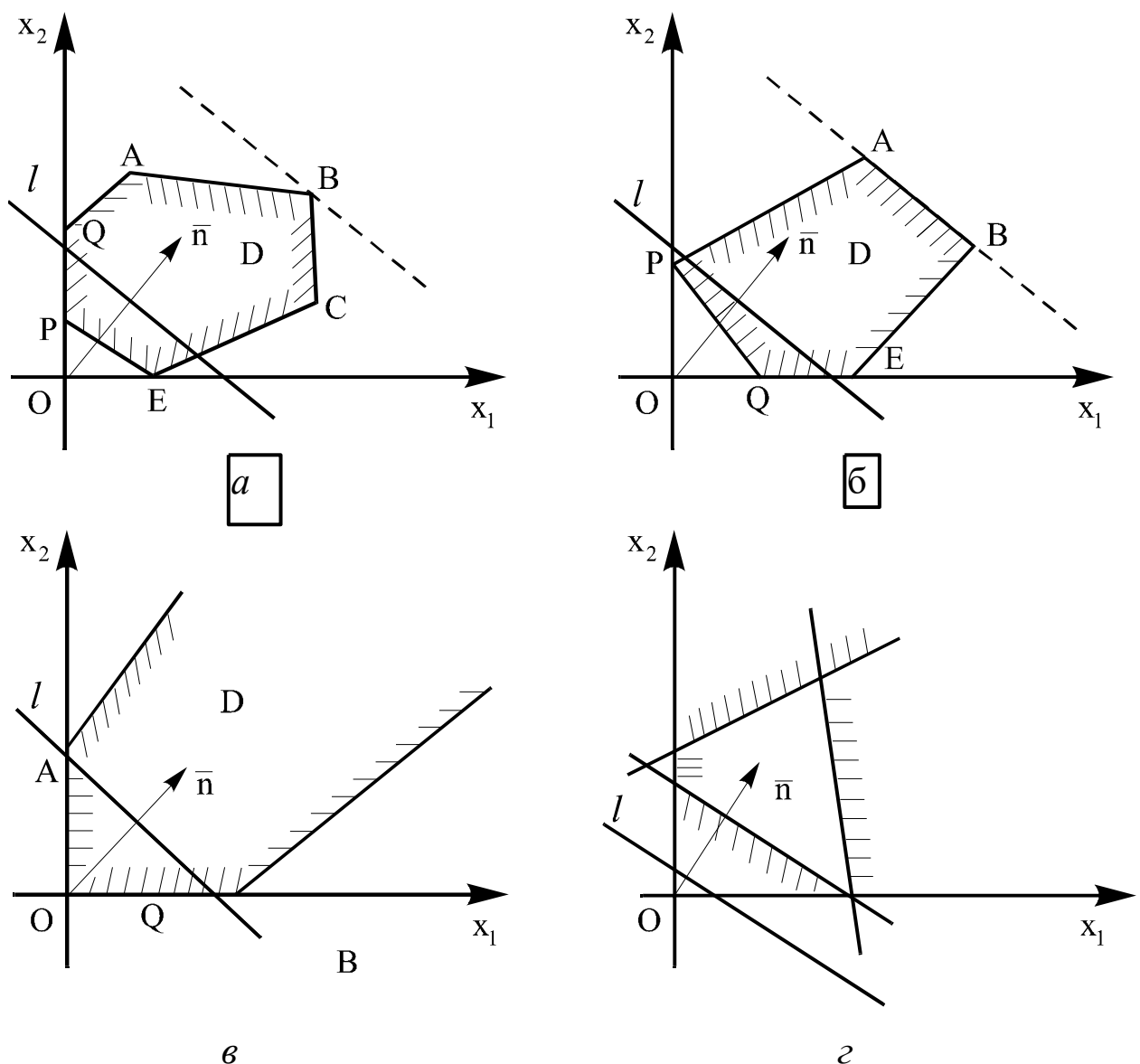


Рис. 2.1.7

При розв'язуванні задачі лінійного програмування графічним методом можуть зустрітись випадки:

- а) цільова функція набуває максимального значення в єдиній точці B і $F_{\max} = F(B)$ (рис. 2.1.7, а);
- б) функція (6.1) набуває максимального значення в кожній точці відрізка AB (рис. 2.1.7, б);
- в) функція необмежена зверху в області D , тобто $F_{\max} = \infty$ (рис. 2.1.7, в);
- г) задача не має розв'язку (система обмежень (2.1.29), (2.1.30) несумісна) (рис. 2.1.7, г).

2.2. ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2

I. Знайти невизначені інтеграли:

1-варіант

$$\text{а) } \int \left(3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx ,$$

$$\text{б) } \int (5 - 4x)^7 dx ,$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{(3x + 2) \ln^2(3x + 2)} ,$$

$$\text{г) } \int (3x - 4)e^x dx .$$

2-варіант

$$\text{а) } \int \left(\frac{3}{4} \sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx ,$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\cos^2(3x + 2)} ,$$

$$\text{в) } \int \frac{4}{(1 + x^2)^3 \sqrt{\arctg x}} dx ,$$

$$\text{г) } \int (2x - 7) \cos x dx .$$

3-варіант

$$\text{а) } \int \left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} + 4 \operatorname{tg} x - 9 \right) dx ,$$

$$\text{б) } \int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx ,$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin^3 x} ,$$

$$\text{г) } \int (x - 5) \ln x dx .$$

4-варіант

$$a) \int \left(3x - \frac{5}{x^2 + 4} - 1 \right) dx,$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x},$$

$$б) \int e^{-x^2} \cdot x dx,$$

$$г) \int (2x-9)3^x dx.$$

5-варіант

$$a) \int \left(4x^5 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx,$$

$$b) \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx,$$

$$б) \int \frac{dx}{3x+1},$$

$$г) \int 7x \ln x dx.$$

6-варіант

$$a) \int \left(\frac{3}{5+x^2} - \frac{7}{x^3} + 5x \right) dx,$$

$$b) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx,$$

$$б) \int \sin(7x-5) dx,$$

$$г) \int x \cos(x+6) dx.$$

7-варіант

$$a) \int \left(\sqrt[5]{x^3} - \frac{4}{x^5} + 2 \sin x \right) dx,$$

$$b) \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}},$$

$$б) \int (5-4x)^7 dx,$$

$$г) \int (x-3) \log_2 x dx.$$

8-варіант

$$a) \int \left(6x^5 - \frac{1}{x^3} - 8\sqrt[5]{x^3} \right) dx,$$

$$b) \int \frac{dx}{(x^2+1) \operatorname{arccotg}^4 x},$$

$$б) \int \cos(1-7x) dx,$$

$$г) \int \ln(3x+1) dx.$$

9-варіант

$$a) \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx,$$

$$b) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos x}},$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}},$$

$$г) \int (3x-5) \sin x dx.$$

10-варіант

$$\text{a) } \int \left(2 \operatorname{ctg} x - 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx,$$

$$\text{в) } \int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 4}},$$

$$\text{б) } \int e^{2x+3} dx,$$

$$\text{г) } \int x \cdot 5^{-x} dx.$$

11-варіант

$$\text{a) } \int \left(7\sqrt[4]{x^3} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx,$$

$$\text{в) } \int \frac{5}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)},$$

$$\text{г) } \int (6x+2)e^x dx.$$

12-варіант

$$\text{a) } \int \left(3 \operatorname{tg} x - \frac{2}{x^4} + 5 \right) dx,$$

$$\text{в) } \int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}},$$

$$\text{г) } \int x \ln 2x dx.$$

13-варіант

$$\text{a) } \int \left(5x^4 + 4 \sin x - \frac{2}{x} \right) dx,$$

$$\text{в) } \int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx,$$

$$\text{б) } \int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx,$$

$$\text{г) } \int \ln(2x-1) dx.$$

14-варіант

$$\text{a) } \int \left(7x^6 + \frac{3}{x^2-9} + 2 \right) dx,$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)},$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{(2+x)^3},$$

$$\text{г) } \int (3x+4) \cos x dx.$$

15-варіант

$$\text{a) } \int \left(2 - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx,$$

$$\text{в) } \int \frac{3dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}},$$

$$\text{б) } \int \operatorname{ctg}(5-3x) dx,$$

$$\text{г) } \int (5x-2)3^x dx.$$

16-варіант

$$\text{a) } \int \left(x^{-7} - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x} \right) dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\text{б) } \int x^6 \cdot e^{11+2x^7} dx,$$

$$\text{г) } \int (2x+3) \log_3 x dx.$$

17-варіант

$$\text{a) } \int \left(3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5} dx,$$

$$\text{б) } \int \cos x e^{\sin x} dx,$$

$$\text{г) } \int (x-2) \cos \frac{x}{3} dx.$$

18-варіант

$$\text{a) } \int (\sqrt{x^7} - \operatorname{ctg} x + 9) dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\text{б) } \int x^7 \sqrt{5-x^8} dx,$$

$$\text{г) } \int \ln(4-5x) dx.$$

19-варіант

$$\text{a) } \int \left[\left(\frac{1}{3} \right)^x - \frac{5}{x} + 4x \right] dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{2}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{2-5x},$$

$$\text{г) } \int \frac{x}{4 \sin^2 x} dx.$$

20-варіант

$$\text{a) } \int \left(\cos x - \frac{4}{x^2+16} + x \right) dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\text{б) } \int \operatorname{ctg}(4x-3) dx,$$

$$\text{г) } \int (1-x) \ln x dx.$$

21-варіант

$$\text{a) } \int \left(9x - \frac{2}{x^2} + 4\sqrt[9]{x} \right) dx,$$

$$\text{б) } \int \cos x \sqrt{\sin^3 x} dx,$$

$$\text{б) } \int \sqrt[5]{(6-5x)^2} dx,$$

$$\text{г) } \int x \sin 7x dx.$$

22-варіант

$$\text{a) } \int (10^x - x \cdot \sqrt[5]{x}) dx,$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}},$$

$$\text{б) } \int 3e^{6+2x} dx,$$

$$\text{г) } \int (2x+1) \cos x dx.$$

23-варіант

а) $\int \left(2x^3 - \frac{4}{\sqrt{5+x^2}} + 7 \right) dx,$

в) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arccctg} x}}{x^2+1} dx,$

б) $\int \cos(1-7x) dx,$

г) $\int (x+7) \cdot e^{5x} dx.$

24-варіант

а) $\int (\sqrt{x^6} - 2\operatorname{tg} x + 1) dx,$

в) $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{3x^2} dx,$

б) $\int \frac{5}{\cos^2(4x+7)} dx,$

г) $\int (x-5) \ln x dx.$

24-варіант

а) $\int (2 \cdot 4^x + e^x - 7) dx,$

в) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx,$

б) $\int \frac{dx}{(3x-5)^4},$

г) $\int x \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x dx.$

25-варіант

а) $\int \left(2x^3 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx,$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{\log_2(x-8)}}{x-8} dx,$

б) $\int \operatorname{tg}(2+3x) dx,$

г) $\int (3x+4) \cos x dx.$

26-варіант

а) $\int \left(\frac{1}{5}x^3 - \frac{6}{x^2} + 3\sqrt{x} \right) dx,$

в) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x},$

б) $\int \sqrt{3-4x} dx,$

г) $\int (x-4) e^x dx.$

27-варіант

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx,$

в) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x},$

б) $\int \frac{dx}{9x^2+16},$

г) $\int (2+x) \ln x dx.$

28-варіант

а) $\int \left(8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx,$

в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^2}},$

б) $\int \operatorname{ctg}(7x+4) dx,$

г) $\int \arccos x dx.$

29-варіант

а) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + 3 \right) dx,$

в) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx,$

б) $\int \frac{dx}{(2x-7)^5},$

г) $\int (2x+3) \sin x dx.$

30-варіант

а) $\int \left(4x^2 + \frac{4}{x^5} + 3\sqrt[3]{x} \right) dx,$

в) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} dx,$

б) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}},$

г) $\int (3x+1)e^x dx.$

II. Обчислити визначені інтеграли:

1-варіант

а) $\int_0^1 (2x-1) dx,$

б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x},$

в) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx.$

2-варіант

а) $\int_{-1}^1 (3x^2 + e^x) dx,$

б) $\int_{-1}^0 \sqrt{4-5x} dx,$

в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

3-варіант

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$

б) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7-2x}},$

в) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{2} dx.$

4-варіант

а) $\int_0^2 (2x+5) dx,$

б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4-3x^2}},$

в) $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx.$

5-варіант

$$a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx,$$

$$б) \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx,$$

$$в) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x \, dx}{\cos^2 x}.$$

6-варіант

$$a) \int_1^{e^3} \frac{dx}{2x},$$

$$б) \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x \, dx}{\cos^2(x^2)},$$

$$в) \int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

7-варіант

$$a) \int_1^2 8^x \, dx,$$

$$б) \int_0^1 3x^2 e^{x^3} \, dx,$$

$$в) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \arccos \frac{x}{3} \, dx.$$

8-варіант

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5 \, dx}{\cos^2 x},$$

$$б) \int_0^1 \frac{3x \, dx}{x^2 + 1},$$

$$в) \int_1^e x \cdot \ln x \, dx.$$

9-варіант

$$a) \int_2^4 \frac{3}{x^2} \, dx,$$

$$б) \int_1^{13} \frac{dx}{\sqrt{6x+3}},$$

$$в) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x \, dx.$$

10-варіант

$$a) \int_{-1}^0 \left(4 + \sqrt[3]{x^2} \right) dx,$$

$$б) \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} \, dx,$$

$$в) \int_0^1 (2x-3)e^x \, dx.$$

11-варіант

$$a) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \, dx}{5 \cos^2 x},$$

$$б) \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx,$$

$$в) \int_0^1 (x+1) \cdot e^x \, dx.$$

12-варіант

а) $\int_1^2 \frac{6 dx}{x^2 - 9},$

б) $\int_{-8}^2 \sqrt{8x + 65} dx,$

в) $\int_1^2 (2x + 1) \cdot \ln x dx.$

13-варіант

а) $\int_{-2}^0 (x^2 + 6x) dx,$

б) $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin 2x dx.$

14-варіант

а) $\int_0^3 \frac{3 dx}{x^2 + 9},$

б) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x - 2}},$

в) $\int_{-7}^1 \ln(x + 8) dx.$

15-варіант

а) $\int_1^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} \right) dx,$

б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx,$

в) $\int_0^{\pi} (3x + 4) \cos \frac{x}{2} dx.$

16-варіант

а) $\int_{-1}^1 (5 - x^3) dx,$

б) $\int_{-8}^0 \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x}},$

в) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3x - 2) \sin x dx.$

17-варіант

а) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx,$

б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 - \cos x},$

в) $\int_0^1 x \cdot \arcsin x dx.$

18-варіант

а) $\int_6^8 \frac{dx}{x^2 - 16},$

б) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}},$

в) $\int_0^3 (x - 5) 2^x dx.$

19-варіант

а) $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - 1) dx,$

б) $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx,$

в) $\int_2^3 \ln(x - 1) dx.$

20-варіант

$$\text{a)} \int_1^e \left(3 + \frac{2}{x}\right) dx,$$

$$\text{б)} \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x},$$

$$\text{в)} \int_0^2 x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx.$$

21-варіант

$$\text{a)} \int_0^5 7e^x dx,$$

$$\text{б)} \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx,$$

$$\text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-5) \cdot \sin x dx.$$

22-варіант

$$\text{a)} \int_1^2 (x^2 + 1) dx,$$

$$\text{б)} \int_3^8 6\sqrt{x+1} dx,$$

$$\text{в)} \int_0^3 (x-5)2^x dx.$$

23-варіант

$$\text{a)} \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx,$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx,$$

$$\text{в)} \int_2^4 x \ln(x-1) dx.$$

24-варіант

$$\text{a)} \int_{-2}^1 (3x^2 - 1) dx,$$

$$\text{б)} \int_{-4}^0 \sqrt{4-3x} dx,$$

$$\text{в)} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$$

25-варіант

$$\text{a)} \int_1^e \frac{3}{x} dx,$$

$$\text{б)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}},$$

$$\text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin \frac{x}{2} dx.$$

26-варіант

$$\text{a)} \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 81}},$$

$$\text{б)} \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx,$$

$$\text{в)} \int_1^2 \ln(2x-1) dx.$$

27-варіант

$$\text{a)} \int_0^1 (e^x - 2x) dx,$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)},$$

$$\text{в)} \int_1^2 x \cdot \ln x dx.$$

28-варіант

$$\text{а) } \int_1^3 \left(4 + \frac{2}{x^2}\right) dx,$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx,$$

$$\text{в) } \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (x-4) \cos 2x dx.$$

29-варіант

$$\text{а) } \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - 2x) dx,$$

$$\text{б) } \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx,$$

$$\text{в) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

30-варіант

$$\text{а) } \int_0^1 (20-x) dx,$$

$$\text{б) } \int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx,$$

$$\text{в) } \int_1^3 (2x+5) e^x dx.$$

III. Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями:

1-варіант: $y = -x^2 + 6x - 5$ і $y = x - 5$;

2-варіант: $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2$ і $y = -x - 3$;

3-варіант: $y = x^2 + 1$ і $y = 9 - x^2$;

4-варіант: $y = -x^2 + 6$ і $y = -2x - 2$;

5-варіант: $y = x^2 - 5$ і $y = 2x - 2$;

6-варіант: $y = x^2 + 5$ і $y = x + 11$;

7-варіант: $y = -x^2 + 3$ і $y = -x + 1$;

8-варіант: $y = -x^2 + 1$ і $y = 3x + 3$;

9-варіант: $y = 3x^2 - 1$ і $y = 3x + 5$;

10-варіант: $y = x^2 + 4x$ і $y = x + 4$;

11-варіант: $y = x^2 - 2$ і $y = 6x + 5$;

12-варіант: $y = -x^2 + 1$ і $y = -4x - 4$;

13-варіант: $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;

14-варіант: $y = 2x - x^2$ і $y = x$;

15-варіант: $y = 3x^2 - 1$ і $4x - y + 3 = 0$;

16-варіант: $y = -x^2$ і $2x + y = -2$;

17-варіант: $y = 3x^2 - 1$ і $y = 3x + 5$;

18-варіант: $y = 2x^2 + 3$ і $y = 2x + 7$;

19-варіант:	$y = x^2 + 4x$ і $x - y + 4 = 0$;
20-варіант:	$y = -x^2 + 4x - 1$ і $y = -x - 1$;
21-варіант:	$y = \frac{1}{3}(x+3)^2$ і $y = -x + 3$;
22-варіант:	$y = x^2 - 2$ і $y = 3x + 2$;
23-варіант:	$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ і $y = x + 2$;
24-варіант:	$y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ і $y = -\frac{1}{2}x - 1$;
25-варіант:	$y = -x^2 - 2x + 3$ і $y = -x + 1$;
26-варіант:	$y = x^2 + 4x + 3$ і $y = x + 3$;
27-варіант:	$y = -2x^2 + 1$ і $y = -2x - 3$;
28-варіант:	$y = -x^2 + 2x - 1$ і $y = -2x + 2$;
29-варіант:	$y = \frac{1}{4}(x-4)^2$ і $y = -x + 4$;
30-варіант:	$y = x^2 + 2x - 8$ і $y = 2x - 4$;

IV. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо відповідної осі фігури, розташованої в першій координатній чверті і обмеженої даними лініями:

1-варіант:	$y^2 = 4x$; $y = x$	(навколо осі Oy).
2-варіант:	$y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 0$	(навколо осі Oy).
3-варіант:	$y = x^2$; $y = -x + 2$	(навколо осі Ox).
4-варіант:	$y = 2x^2$; $y + x = 3$	(навколо осі Oy).
5-варіант:	$y = \frac{1}{4}x^2$; $y = -x + 3$	(навколо осі Ox).
6-варіант:	$y = x(4 - x)$; $y = 0$	(навколо осі Oy).
7-варіант:	$y = \frac{1}{2}x^2$; $y = -3x + 8$	(навколо осі Ox).
8-варіант:	$y = 2x^2$; $y = -x + 10$	(навколо осі Ox).
9-варіант:	$y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -3x + 12$	(навколо осі Ox).
10-варіант:	$y = 2x^2$; $y = -2x + 4$	(навколо осі Ox).
11-варіант:	$y = 3x^2$; $y = -5x + 8$	(навколо осі Ox).
12-варіант:	$y = \frac{x^2}{4} - 1$; $y = 0$	(навколо осі Ox).

13-варіант:	$y = \frac{1}{2}x^2; y = -x + 3$	(навколо осі Ox).
14-варіант:	$y = \frac{1}{4}x^2; y = -2x + 6$	(навколо осі Ox).
15-варіант:	$y = \frac{1}{3}x^2; y = -2x + 9$	(навколо осі Ox).
16-варіант:	$y = x^3; x = 0; y = 27$	(навколо осі Oy).
17-варіант:	$y = 2x^2; y = -3x + 14$	(навколо осі Ox).
18-варіант:	$y = 2x^2; y + x = 5$	(навколо осі Oy).
19-варіант:	$y = 3x^2; y = -x + 4$	(навколо осі Ox).
20-варіант:	$y = 8 - x^2; y = x^2$	(навколо осі Ox).
21-варіант:	$y = 4x^2; y = -2x + 2$	(навколо осі Ox).
22-варіант:	$y = 3x^2; y = -3x + 6$	(навколо осі Ox).
23-варіант:	$y = \frac{1}{4}x^2; y = -\frac{1}{2}x + 2$	(навколо осі Ox).
24-варіант:	$y = 2 - x^2; y = x^2$	(навколо осі Ox).
25-варіант:	$y = 4x^2; y = -2x + 6$	(навколо осі Ox).
26-варіант:	$y = x^2; y = -x + 3$	(навколо осі Oy).
27-варіант:	$y = x^2; y = -2x + 5$	(навколо осі Ox).
28-варіант:	$y = x^2; y = 1$	(навколо осі Oy).
29-варіант:	$y = x^2; y = -x + 3$	(навколо осі Ox).
30-варіант:	$y = 4 - x^2; y = x$	(навколо осі Oy).

V. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

1-варіант:	$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$	2-варіант:	$\int_0^1 \ln x dx.$
3-варіант:	$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$	4-варіант:	$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$
5-варіант:	$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}.$	6-варіант:	$\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}.$

7-варіант: $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)dx}{3x-1}.$

8-варіант: $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$

9-варіант: $\int_{-1}^3 \frac{dx}{(x+1)^2}.$

10-варіант: $\int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx.$

11-варіант: $\int_0^\infty x \cdot 2^{-x^2} dx.$

12-варіант: $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}.$

13-варіант: $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}.$

14-варіант: $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

15-варіант: $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$

16-варіант: $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}.$

17-варіант: $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}.$

18-варіант: $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

19-варіант: $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$

20-варіант: $\int_0^1 \frac{2x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

21-варіант: $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$

22-варіант: $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$

23-варіант: $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}.$

24-варіант: $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}.$

25-варіант: $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$

26-варіант: $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$

27-варіант: $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$

28-варіант: $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

29-варіант: $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

30-варіант: $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$

VI. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції:

1-варіант:

$$z = e^x y - x^4 y + y^2 + 3y - x - 4.$$

2-варіант:

$$z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 + y - 7x + 1.$$

3-варіант:

$$z = x^5 y - x^2 y + 2 \cos y + 3x + y + 4.$$

4-варіант:

$$z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2 \operatorname{tg} y - 4x - 1.$$

5-варіант:

$$z = 3e^x + 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + x - 7.$$

6-варіант:

$$z = 2y \sin x - x^3 y^2 + 4y^3 + y - 3x - 5.$$

7-варіант:

$$z = 3xe^y + x^2 y + 2 \cos y + x - y + 3.$$

8-варіант:

$$z = 2x^3 \cos y + 3x^5 y^4 - y^3 + x - 4.$$

9-варіант:

$$z = x^3 y + y^2 \cos x + 2y^3 - 5y + 7.$$

10-варіант:

$$z = 5e^x y^3 - 2xy^3 + 5y - 4x + 1.$$

11-варіант:

$$z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5.$$

12-варіант:

$$z = 3 \ln x - x^2 y^4 + 2y + 5x - 4.$$

13-варіант:

$$z = 2x^4 y - y^2 + 5y - 7x + 2.$$

14-варіант:

$$z = x^3 y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5.$$

15-варіант:

$$z = 2x^5 - 3x^2 y^4 + y^3 + 5y - x - 3.$$

16-варіант:

$$z = 3e^x y^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4.$$

17-варіант:

$$z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1$$

18-варіант:

$$z = x^4 - 3x^3y^2 + 4x + 2y - 3$$

19-варіант:

$$z = 4x^5 - x^4y + \ln y - e^x + 3$$

20-варіант:

$$z = 5x^2 - 2x^3y^4 + 4x - 3\ln y$$

21-варіант:

$$z = x^2y + 2\ln x + 7\ln y + 3x + y$$

22-варіант:

$$z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2$$

23-варіант:

$$z = 2x^2y - 3x + 4y^2 + \frac{4x}{y}$$

24-варіант:

$$z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y$$

25-варіант:

$$z = 4x^3 - 3x^2y + 2y^3 + 5\ln x - 6$$

26-варіант:

$$z = e^x - x^3y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1$$

27-варіант:

$$z = 5x^3y^2 - 3x + y^2 + \frac{2x}{y^3} - 3$$

28-варіант:

$$z = xy^4 - x^3y + 2\sin y - x + 3$$

29-варіант;

$$z = 4x^2 - xy^3 + 3\ln y - e^x + 2$$

30-варіант:

$$z = 2x^2y - \ln x + 3y^2 + \frac{4}{x}$$

VI. Знайти: а) градієнт функції $z=f(x,y)$ у точці A ;
 б) похідну функції $z=f(x,y)$ у точці A за напрямком
 вектора $\vec{a}$:

1-варіант:	$z = \ln(x^2 + y^3 - 2x + 3);$	$A(1; 1);$	$\vec{a} (0; -2);$
2-варіант:	$z = x^2 \ln y;$	$A(2; 1);$	$\vec{a} (3; -4);$
3-варіант:	$z = y \operatorname{tg} x + x^2 y - 3x^2 - 5y;$	$A(0; 5);$	$\vec{a} (1; 2);$
4-варіант:	$z = 2x^4 y^3 - \frac{x^2}{y};$	$A(1; 1);$	$\vec{a} (-2; 0);$
5-варіант:	$z = 7 + \frac{y}{x};$	$A(1; 1);$	$\vec{a} (-4; 3);$
6-варіант:	$z = \operatorname{arctg}(xy^2);$	$A(1; 1);$	$\vec{a} (4; -3);$
7-варіант:	$z = \arcsin(x^2/y);$	$A(1; 2);$	$\vec{a} (0; 3);$
8-варіант:	$z = \ln(3x^2 - 4y^3);$	$A(1; 0);$	$\vec{a} (6; -8);$
9-варіант:	$z = e^x y^3 - 2^x;$	$A(0; 1);$	$\vec{a} (0; -3);$
10-варіант:	$z = 3 \cos(x^2 y) - 8 + e^{xy};$	$A(0; 1);$	$\vec{a} (-8; 6);$
11-варіант:	$z = 9 - 2y \cdot \operatorname{arctg} x;$	$A(1; 2);$	$\vec{a} (4; 0);$
12-варіант:	$z = \operatorname{arctg}(y/x);$	$A(-1; 1);$	$\vec{a} (1; -1);$
13-варіант:	$z = \ln(x + 2y^2) + \frac{x}{2};$	$A(0; 1);$	$\vec{a} (-5; 12);$
14-варіант:	$z = 5 \ln(2x - 3y);$	$A(1; 0);$	$\vec{a} (-6; 8);$
15-варіант:	$z = 4 \ln\left(\frac{1}{xy}\right);$	$A(1; -1);$	$\vec{a} (-3; 4);$
16-варіант:	$z = \frac{3x}{y^2} - 7x + y;$	$A(0; 1);$	$\vec{a} (-3; -4);$
17-варіант:	$z = \operatorname{arctg}(xy);$	$A(2; 3);$	$\vec{a} (4; 3);$
18-варіант:	$z = \ln(3x^2 + 2xy^2);$	$A(1; 0);$	$\vec{a} (-8; 6);$
19-варіант:	$z = \arccos(xy);$	$A(0; 1);$	$\vec{a} (3; 2);$
20-варіант:	$z = 5x^2 - 2xy + y^2;$	$A(1; 1);$	$\vec{a} (2; -1);$
21-варіант:	$z = \ln(3x^2 + 2y^3);$	$A(-1; 2);$	$\vec{a} (3; 1);$
22-варіант:	$z = x^4 + 5x^2 y^2 - 3;$	$A(2; -2);$	$\vec{a} (-2; 5);$

23-варіант:	$z = x^2 + 3xy - 4y^2 + x;$	$A(1; 3);$	$\vec{a} (8; -6);$
24-варіант:	$z = 2x^2 - 4xy + 5x + 6y;$	$A(3; -2);$	$\vec{a} (3; 4);$
25-варіант:	$z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{y}};$	$A(1; 4);$	$\vec{a} (-5; 12);$
26-варіант:	$z = \ln \sqrt{4 - x^2 - y^2};$	$A(1; -1);$	$\vec{a} (-1; 1);$
27-варіант:	$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$	$A(-2; 4);$	$\vec{a} (4; 3);$
28-варіант:	$z = \frac{x - y}{x + y};$	$A(4; 3);$	$\vec{a} (2; -1);$
29-варіант:	$z = \ln(3x - 2y)^2;$	$A(2; 1);$	$\vec{a} (2; 2);$
30-варіант:	$z = x^3 - 2xy^2;$	$A(1; 2);$	$\vec{a} (-3; 4).$

VII. Знайти похідну функції $u = f(x; y; z)$ за напрямком вектора $\vec{l}$ та градієнт у заданій точці M_0 :

1-в.	$u = e^{x+2y+3z},$	$\vec{l} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k},$	$M_0(-1; 3; 2).$
2-в.	$u = \ln(x + y - z^2),$	$\vec{l} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$	$M_0(0; 0; 2).$
3-в.	$u = \operatorname{arctg}(x^2 + y) - z,$	$\vec{l} = -\vec{i} + 3\vec{j},$	$M_0(-2; 7; 0).$
4-в.	$u = \arcsin(2x + y - z),$	$\vec{l} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k},$	$M_0(-1; 3; 4).$
5-в.	$u = \sqrt{x^3 - 3y + z^2},$	$\vec{l} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k},$	$M_0(0; -1; 1).$
6-в.	$u = \ln y^2 - \sqrt{xz},$	$\vec{l} = -\vec{i} - \vec{k},$	$M_0(1; 7; 3).$
7-в.	$u = xz + \arccos(x - y^2),$	$\vec{l} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k},$	$M_0(2; 2; 3).$
8-в.	$u = \operatorname{arctg}(x^2 + y) - z,$	$\vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k},$	$M_0(-2; 0; 1).$
9-в.	$u = 3z^2 + e^{x+2y},$	$\vec{l} = 3\vec{j} - 2\vec{k},$	$M_0(1; -5; 0).$
10-в.	$u = x^3 - \arcsin \sqrt{yz},$	$\vec{l} = \vec{i} + \vec{k},$	$M_0(0; 8; -2).$
11-в.	$u = yz - 2\ln(x - z^2),$	$\vec{l} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k},$	$M_0(-3; 0; 0).$
12-в.	$u = 4x + e^{2x-y+3z},$	$\vec{l} = 3\vec{i} + 5\vec{j},$	$M_0(-1; -3; 0).$
13-в.	$u = z + \operatorname{arctg}(y^2 - 2xy),$	$\vec{l} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$	$M_0(-2; -1; 1).$
14-в.	$u = \operatorname{arcctg}(zx^2 + y),$	$\vec{l} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},$	$M_0(1; 7; 3).$
15-в.	$u = \sqrt{2x + y^2 + 2z^2},$	$\vec{l} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k},$	$M_0(2; -2; 4).$
16-в.	$u = 3\ln y^3 - \sqrt{x} + z,$	$\vec{l} = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$	$M_0(0; -4; -1).$
17-в.	$u = e^{-x+2y-z},$	$\vec{l} = 7\vec{j} - \vec{k},$	$M_0(-1; 0; 7).$
18-в.	$u = \operatorname{arcctg}(yx^2 - z),$	$\vec{l} = 2\vec{i} - 4\vec{j},$	$M_0(-4; -4; 5).$
19-в.	$u = \ln(5 - x^2y - z^2),$	$\vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k},$	$M_0(-3; 0; 2).$

20-в.	$u = \arccos(x - y^2 + 2z),$	$\vec{l} = 2\vec{i} - 5\vec{k},$	$M_0(2; -1; 0).$
21-в.	$u = \sqrt[3]{x - y^3 - 4z},$	$\vec{l} = -\vec{i} + 8\vec{j},$	$M_0(1; -1; 1).$
22-в.	$u = 2 - \ln zy - \sqrt{3x},$	$\vec{l} = 3\vec{j},$	$M_0(-1; 0; -1).$
23-в.	$u = -y^3 + 2e^{x+yz},$	$\vec{l} = \vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k},$	$M_0(1; 0; -2).$
24-в.	$u = xy + \arcsin \sqrt{yz},$	$\vec{l} = 6\vec{i} + 5\vec{j},$	$M_0(1; 4; -4).$
25-в.	$u = \arcsin(5 - x^2 + y^2z),$	$\vec{l} = 4\vec{i},$	$M_0(2; 3; 3).$
26-в.	$u = x^2 - \sqrt{2y - z^2},$	$\vec{l} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},$	$M_0(-1; -3; 0).$
27-в.	$u = \sqrt{y} - \sqrt{x+z},$	$\vec{l} = -3\vec{i} - 8\vec{k},$	$M_0(3; 1; 4).$
28-в.	$u = 4z - \ln(5 - x^2y),$	$\vec{l} = -7\vec{k},$	$M_0(0; 0; -4).$
29-в.	$u = x - \operatorname{arctg}(x^2 + yz),$	$\vec{l} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},$	$M_0(1; -1; -2).$
30-в.	$u = \sqrt[3]{3x + y^2 - z + 2},$	$\vec{l} = -5\vec{i} + 7\vec{j},$	$M_0(1; 0; -2).$

VIII. Розв'язати задачі лінійного програмування графічним методом:

1-в. $z = 2x_1 + x_2 \quad (\max);$

$$x_1 - 2x_2 \geq 4;$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 10;$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 12;$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 28;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2-в. $z = 6x_1 + 3x_2 \quad (\min);$

$$2x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4;$$

$$x_1 + x_2 \leq 5;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3-в. $z = 3x_1 + 3x_2 \quad (\max);$

$$x_1 - 4x_2 \leq 4;$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 7;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4-в. $z = 2x_1 + x_2 \quad (\min);$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8;$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15;$$

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10;$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

5-в. $z = 2x_1 + 2x_2 \quad (\max);$

$$3x_1 - 2x_2 \geq -6;$$

$$x_1 + x_2 \geq 3;$$

$$x_1 \leq 9;$$

$$x_2 \leq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

6-в. $z = 5x_1 - 3x_2 \quad (\min);$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6;$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq -6;$$

$$x_1 + x_2 \leq 4;$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 28;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7-B. $z = 2x_1 + x_2$ (max);

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6;$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30;$$

$$2x_1 + x_2 \geq 2;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

8-B. $z = -3x_1 + x_2$ (min);

$$x_1 + 2x_2 \geq 10;$$

$$3x_1 + x_2 \geq 15;$$

$$x_1 \leq 8;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

9-B. $z = 2x_1 + 5x_2$ (max);

$$4x_1 + 5x_2 \leq 40;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 5;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

10-B. $z = -2x_1 + x_2$ (min);

$$2x_1 + x_2 \leq 8;$$

$$x_1 + x_2 \leq 6;$$

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 3;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

11-B. $z = 3x_1 + 3x_2$ (max);

$$5x_1 + x_2 \geq 10;$$

$$x_1 + 7x_2 \geq 7;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 10;$$

$$-5x_1 + 3x_2 \leq 30;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

12-B. $z = 7x_1 - x_2$ (min);

$$x_1 + x_2 \geq 3;$$

$$5x_1 + x_2 \geq 5;$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 5;$$

$$x_1 \leq 4, x_2 \leq 4 ;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

13-B. $z = x_1 + x_2$ (max);

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$10x_1 + 7x_2 \leq 35;$$

$$-x_1 - x_2 \leq -1;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

14-B. $z = -3x_1 + 6x_2$ (min);

$$5x_1 - 2x_2 \leq 4;$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -4;$$

$$x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

15-B. $z = 3x_1 - 2x_2$ (max);

$$2x_1 + x_2 \leq 11;$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 20;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

16-B. $z = -2x_1 + 4x_2$ (min);

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + x_2 \geq 3;$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

17-B. $z = 2x_1 + x_2$ (max);
 $x_1 - 2x_2 \geq 4$;
 $5x_1 + 2x_2 \geq 10$;
 $4x_1 - 3x_2 \leq 12$;
 $7x_1 + 4x_2 \leq 28$.
 $x_1, x_2 \geq 0$.

18-B. $z = 5x_1 + 2x_2$ (min);
 $5x_1 + 2x_2 \geq 10$;
 $2x_1 - 3x_2 \leq 6$;
 $x_1 + 2x_2 \geq 4$;
 $x_1, x_2 \geq 0$.

19-B. $z = x_1 + 2x_2$ (max);
 $2x_1 + x_2 \leq 14$;
 $-3x_1 + 2x_2 \leq 9$;
 $3x_1 + 4x_2 \geq 27$;
 $6x_1 - x_2 \geq 18$.
 $x_1, x_2 \geq 0$.

20-B. $z = -2x_1 + x_2$ (min);
 $2x_1 + x_2 \leq 8$;
 $x_1 + 3x_2 \geq 6$;
 $3x_1 + x_2 \geq 3$;
 $x_1, x_2 \geq 0$.

21-B. $z = 3x_1 + 2x_2$ (max);
 $x_1 + 2x_2 \leq 6$;
 $2x_1 + x_2 \leq 8$;
 $-x_1 + x_2 \geq 1$;
 $x_2 \leq 2$;
 $x_1, x_2 \geq 0$.

22-B. $z = x_1 + 2x_2$ (min);
 $5x_1 - 2x_2 \leq 20$;
 $x_1 - 2x_2 \geq -20$;
 $x_1 + x_2 \geq 16$;
 $x_1, x_2 \geq 0$.

23-B. $z = 3x_1 - 2x_2$ (max);
 $7x_1 + 2x_2 \geq 14$;
 $-x_1 + 2x_2 \geq 2$;
 $7x_1 + 10x_2 \leq 28$;
 $x_1, x_2 \geq 0$.

24-B. $z = -2x_1 + 5x_2$ (min);
 $7x_1 + 2x_2 \geq 14$;
 $5x_1 + 6x_2 \leq 30$;
 $3x_1 + 8x_2 \geq 24$;
 $x_1, x_2 \geq 0$.

25-B. $z = 2x_1 - 5x_2$ (max);
 $4x_1 + 3x_2 \leq 12$;
 $3x_1 + 4x_2 \geq 24$;
 $x_1, x_2 \geq 0$.

26-B. $z = 2x_1 - 10x_2$ (min);
 $x_1 - x_2 \geq 0$;
 $x_1 - 5x_2 \geq -5$;
 $x_1, x_2 \geq 0$;

$$27\text{-в. } z = x_1 + x_2 \quad (\max);$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12;$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 1;$$

$$x_2 \leq 3;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$28\text{-в. } z = x_1 + x_2 \quad (\min);$$

$$x_1 + x_2 \leq 8;$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$29\text{-в. } z = 8x_1 + 3x_2 \quad (\max);$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 36;$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20;$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$4x_1 - x_2 \geq 8;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$30\text{-в. } z = 4x_1 + 6x_2 \quad (\min);$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8;$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 12;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2.3. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2

I. Знайти невизначені інтеграли:

а)

$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} +$$

$$+ 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| + 4 \operatorname{arctg} x + C$$

$$\text{б) } \int \frac{x dx}{x^2 - 1} = \int \frac{2x dx}{2(x^2 - 1)} = \left| \begin{matrix} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C.$$

$$\text{в) } \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{r) } \int_1^8 (5-x) \cdot 5^x dx &= \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = 5-x \rightarrow du = -dx, \\ dv = 5^x dx \rightarrow v = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \end{array} \right| = (5-x) \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 5} \int 5^x dx = \\
 &= (5-x) \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{5^x}{\ln^2 5} + C.
 \end{aligned}$$

II. Обчислити визначені інтеграли:

a)

$$\begin{aligned}
 \int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3} dx &= \int_1^8 \left(\frac{2}{x^3} + \frac{5x^{\frac{1}{3}}}{x^3} \right) dx = 2 \int_1^8 x^{-3} dx + 5 \int_1^8 x^{-\frac{8}{3}} dx = \\
 &= \left(2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 5 \cdot \frac{3x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} \right) \Big|_1^8 = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} \right) \Big|_1^8 = \\
 &= \left(-\frac{1}{64} - \frac{3}{32} \right) - (-1-3) = 4 - \frac{7}{64} = 3\frac{57}{64}.
 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
 \int_{-5}^1 \sqrt{6-2x} dx &= \int_{-5}^1 (6-2x)^{\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 6-2x \\ dt = (6-2x)' dx = -2dx \\ dx = \frac{dt}{-2} \\ a = -5 \rightarrow \alpha = 6-2 \cdot (-5) = 16 \\ b = 1 \rightarrow \beta = 6-2 \cdot 1 = 4 \end{array} \right| = \int_{16}^4 t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{-2} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_4^{16} t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_4^{16} = \frac{\sqrt{t^3}}{3} \Big|_4^{16} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{В) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du; \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx; \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \rightarrow v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}. \end{array} \right| = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{x} \Big|_1^e = \left(-\frac{1}{e} \ln e + 1 \ln 1 \right) - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = \left(-\frac{1}{e} + 0 \right) - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

III. Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями:

$$y = 3 - x^2 \text{ та } y = x - 3.$$

Розв'язання:

Знайдемо координати точок A і B перетину параболи й прямої:

$$\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = x - 3 \end{cases},$$

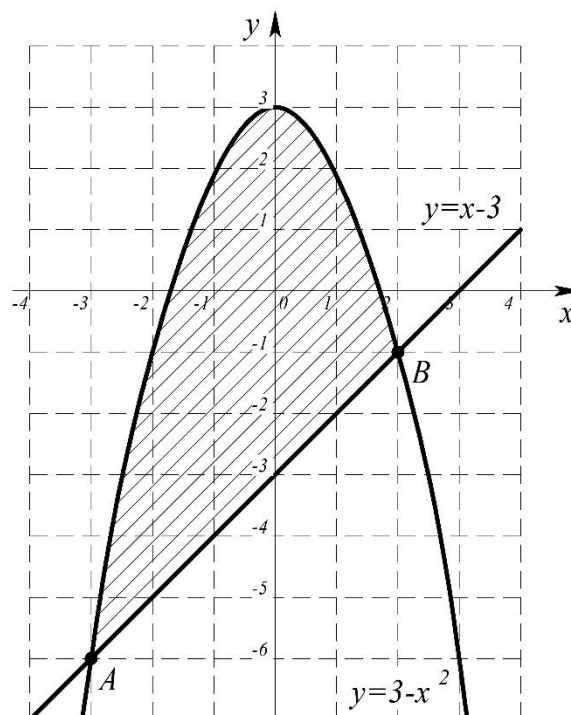
$$3 - x^2 = x - 3;$$

$$x^2 + x - 6 = 0;$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$

$$A(-3, -6), \quad B(2, -1).$$

Зобразимо фігуру, площу якої треба знайти:



У нашому випадку маємо:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx = \\
 &= \int_{-3}^2 [(3 - x^2) - (x - 3)] dx = \int_{-3}^2 [-x^2 - x + 6] dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_{-3}^2 = \\
 &= \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18 \right) = \frac{22}{3} + \frac{27}{2} = \frac{44 + 81}{6} = \frac{125}{6} \text{ (кв. од.)}
 \end{aligned}$$

IV. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо відповідної осі фігури, розташованої в першій координатній чверті і обмеженої даними лініями:

$$y = x^3; \quad y = 8; \quad x = 0 \quad (\text{навколо осі } Ox).$$

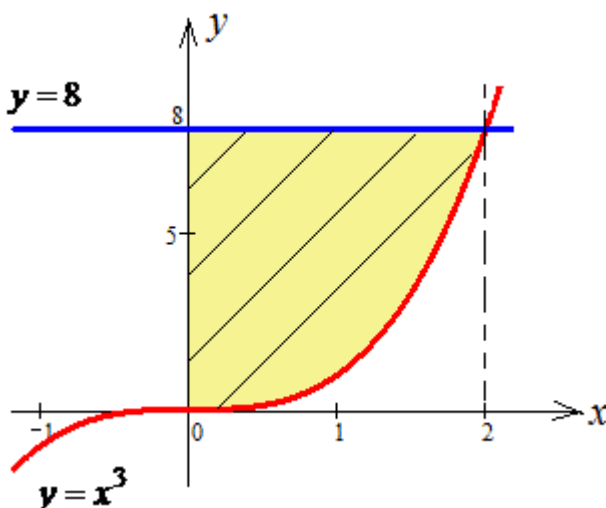
Розв'язання:

Знайдемо межі інтегрування, тобто абсциси точок перетину заданих кривих:

$$x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Отже, $0 \leq x \leq 2$.

Зобразимо фігуру, об'єм тіла обертання якої треба знайти:



У нашому випадку маємо:

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_a^b \left[8^2 - (x^3)^2 \right] dx = \pi \int_a^b (64 - x^6) dx = \pi \left(64x - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^2 = \\
&= \pi \left(64 \cdot 2 - \frac{2^7}{7} \right) = \pi \cdot \left(128 - \frac{128}{7} \right) = \frac{768}{7} \pi \text{ (куб.од.)}
\end{aligned}$$

V. Обчислити невластний інтеграл або довести його збіжність:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg \frac{x+3}{2} \Big|_1^b = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{b+3}{2} - \arctg 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg 2 \right).
\end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

VI. Знайти: а) градієнт функції $z=f(x,y)$ у точці A ;
б) похідну функції $z=f(x,y)$ у точці A за напрямком вектора $\vec{a}$:

$$z = \arctg xy; \quad M(1; 1); \quad \vec{a}(1; 1).$$

Розв'язання:

Спочатку знаходимо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\arctg xy)'_x = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot yx' = \frac{y}{1+x^2y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\arctg xy)'_y = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot xy' = \frac{x}{1+x^2y^2}.$$

Обчислюємо значення частинних похідних у точці $(1; 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1;1)} = \frac{y}{1+x^2y^2} \Big|_{(1;1)} = \frac{1}{1+1^2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1;1)} = \frac{x}{1+x^2y^2} \Big|_{(1;1)} = \frac{1}{1+1^2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2}.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ наступні:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тоді похідна функції у точці $M(1; 1)$ за напрямом вектора $\vec{a}(1; 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Гradient функції у точці M :

$$\text{grad } z|_M = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

VII. Знайти похідну функції $u = f(x; y; z)$ за напрямком вектора $\vec{l}$ та gradient у заданій точці M_0 :

$$u = \ln(x^2 - 2xy) + z^3, \quad \vec{l} = \vec{i} - 4\vec{k}, \quad M_0(2; -1; 1).$$

Розв'язання.

Обчислимо значення частинних похідних у точці M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x - 2y}{x^2 - 2xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = \frac{2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)}{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (-1)} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2x}{x^2 - 2xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = \frac{(-2) \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{l}$ наступні:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{0}{\sqrt{17}} = 0, \quad \cos \gamma = -\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Отже, маємо похідну функції за напрямком вектора $\vec{l}$ у заданій точці M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{17}} \right) = -\frac{45}{\sqrt{17}}.$$

Gradient функції у точці M_0 :

$$\text{grad } u|_{M_0} = \left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; 3 \right).$$

VIII. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \quad (\max);$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1;$$

$$x_2 \leq 2;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

1. Побудуємо многокутник допустимих розв'язків:

$$x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3} = 1; \quad (1)$$

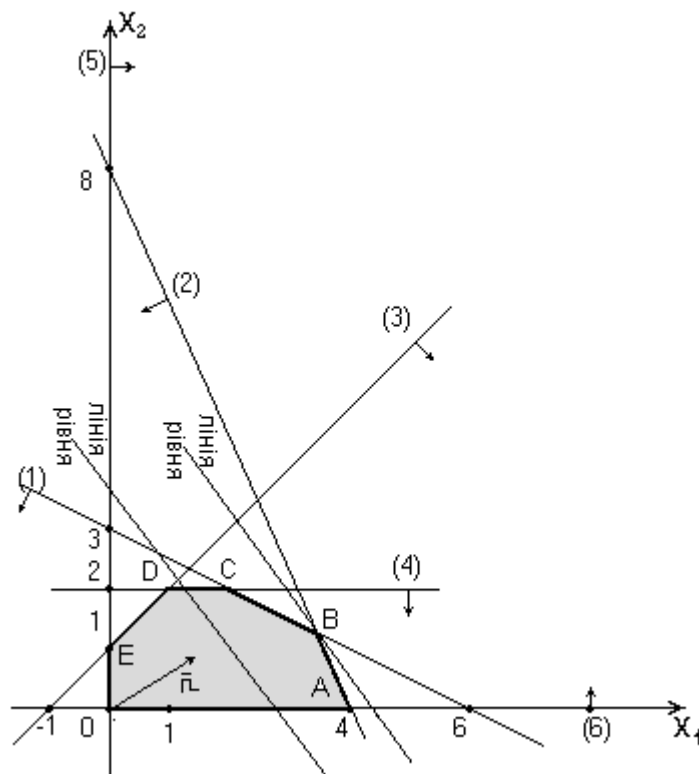
$$2x_1 + x_2 = 8; \Rightarrow \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} = 1; \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 = 1; \Rightarrow \frac{x_1}{-1} + \frac{x_2}{1} = 1; \quad (3)$$

$$x_2 = 2; \quad (4)$$

$$x_1 = 0; \quad (5)$$

$$x_2 = 0. \quad (6)$$



2. Знайдемо вектор градієнт заданої функції:

$$\bar{n} = \text{grad } z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = (3; 2)$$

і побудуємо його.

3. Зобразимо лінії рівня функції $z = 3x_1 + 2x_2$.

4. Пересуваючи лінію рівня у додатньому напрямку вектора градієнта, визначаємо вершину, в якій лінійна форма набуває максимального значення.

З рисунка видно, що це точка B .

5. Враховуючи, що вершина B – точка перетину прямих (1) та (2), знаходимо координати $m.B$, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 6; \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{array} \right. \cdot (-2) \\ + \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 - 4x_2 = -12; \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{array} \right. \\ \hline -3x_2 = -4; \\ x_2 = \frac{-4}{-3} = 1\frac{1}{3}. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1\frac{1}{3}; \\ x_1 = 6 - 2 \cdot \frac{4}{3} = 3\frac{1}{3}. \end{array} \right. \end{array}$$

Отже, $B \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3} \right)$.

Підставляючи координати $m.B$ у лінійну форму $z = 3x_1 + 2x_2$, знаходимо її максимальне значення:

$$z_{\max} = 3 \cdot 3\frac{1}{3} + 2 \cdot 1\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник за редакцією В.П.Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2005. – 480с.
2. Вища математика: Підручник за редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. – 480с.
3. Вища та прикладна математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / С.І. Резніков, О.П. Зінкевич, В.М. Сафонов та ін. – К.: НУХТ, 2016. – 343с.
4. Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник у чотирьох частинах. – К.: Книжкове вид-во НАУ., 2006.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2003. – 648с.
6. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у двох частинах.– К.: Техніка, 2000. – 592с.
7. Руська Р.В., Алілуйко А.М., Мартинюк О.М., Новосад І.: Прикладна математика Частина І. Навчальний посібник. Тернопіль. – 2020. – 98с.
8. Фортуна В.В., Бескровний О.І. Вища та прикладна математика: Навч. посібн. для студ. екон. спец. ВНЗ – Львів: Магнолія 2006, 2013. – 647с.