



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Левківська Л.В.

Методичні вказівки
до вивчення дисципліни
“Теорія ймовірностей та математична статистика”

для студентів денної форми навчання
спеціальності 075 «Маркетинг»
освітньо-професійної програми «Маркетинг послуг»



Київ НТУ
2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Левківська Л.В.

Методичні вказівки
до вивчення дисципліни
“Теорія ймовірностей та математична статистика”

для студентів денної форми навчання
спеціальності 075 «Маркетинг»
освітньої програми «Маркетинг послуг»

Затверджено
на засіданні Науково - методичної Ради
Національного транспортного університету
протокол № від 2022 року
Проректор, проф. М.О. Білякович

Київ НТУ 2022

Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів денної форми навчання спеціальності 075 «Маркетинг» освітньої програми «Маркетинг послуг» / Укл.: Л.В. Левківська. — К.: НТУ, 2022. — 90 с.

Укладач: Левківська Людмила Володимирівна, к.т.н., доцент.

Відповідальний за випуск: Левківська Л.В., к.т.н., доцент.

У даному посібнику представлено теоретичний та практичний матеріал, що повністю відповідає навчальній дисципліні «Теорія ймовірностей і математична статистика» напряму підготовки «Маркетинг».

На початку кожної теми подано теоретичний матеріал, після якого наведені типові приклади з розв’язками, а також повний спектр завдань для аудиторної та домашньої роботи студентів, модульних контрольних робіт. У кінці посібника у вигляді таблиць представлений довідковий матеріал, необхідний для розв’язування задач.

© Л.В. Левківська, 2022

© Національний транспортний університет, 2022

Вступ	6
Модуль 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	
Перший змістовий модуль (ЗМ1): ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ	
<i>Лекція 1. Основні поняття теорії ймовірностей</i>	7
1.1. Предмет теорії ймовірностей	7
1.2. Випадкові події та їх класифікація	8
1.3. Класичне означення ймовірності появи події	8
1.4. Формули і правила комбінаторики	9
<i>Завдання для практичного заняття 1. Елементи комбінаторики</i>	12
<i>Завдання для домашньої роботи студентів</i>	13
<i>Завдання для практичного заняття 2. Класичний спосіб обчислення ймовірності появи події</i>	13
<i>Завдання для домашньої роботи студентів</i>	14
<i>Лекція 2. Ймовірність суми і добутку випадкових подій</i>	15
2.1. Теореми ймовірностей для сумісних і несумісних подій	15
2.2. Теореми множення ймовірностей для незалежних та залежних подій	16
<i>Завдання для практичного заняття 3. Застосування теорем додавання та множення ймовірностей подій</i>	20
<i>Завдання для домашньої роботи студентів</i>	20
<i>Завдання для практичного заняття 4. Спільне використання теорем додавання і множення ймовірностей на практиці</i>	21
<i>Завдання для домашньої роботи студентів</i>	21
<i>Лекція 3. Априорні та апостеріорні ймовірності гіпотези</i>	22
3.1. Формула повної ймовірності	22
3.2. Формули Байєса	23
<i>Завдання для практичного заняття 5. Практичне застосування формули повної ймовірності</i>	25
<i>Завдання для домашньої роботи студентів</i>	26
<i>Завдання для практичного заняття 6. Застосування формул Байєса</i>	26
<i>Завдання для домашньої роботи студентів</i>	27

Другий змістовий модуль (ЗМ2): ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

<u>Лекція 4. Формула Бернуллі та її граничні теореми.</u>	28
4.1. Повторні незалежні випробування. Схема Бернуллі	28
4.2. Граничні теореми формули Бернуллі	30
<u>Завдання для практичного заняття 7. Практичне використання формули Бернуллі та її наслідків</u>	33
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	34
<u>Завдання для практичного заняття 8. Застосування граничних теорем</u>	34
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	34
<u>Завдання для практичного заняття 9. Модульна контрольна робота №1</u>	35

Модуль 2. ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Третій змістовий модуль (ЗМ3): ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

<u>Лекція 5. Поняття випадкової величини та законів розподілу її ймовірностей</u>	48
5.1. Види випадкових величин та способи їх задання	49
5.2. Загальні закони розподілу дискретних випадкових величин	50
5.3. Функція та щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини	52
<u>Завдання для практичного заняття 10. Закони розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини</u>	55
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	56
<u>Завдання для практичного заняття 11. Закони розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини</u>	56
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	57
<u>Лекція 6. Числові характеристики випадкових величин</u>	58
6.1. Математичне сподівання	58
6.2. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення	59

<u>Завдання для практичного заняття 12. Числові характеристики дискретної випадкової величини</u>	62
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	62
<u>Завдання для практичного заняття 13. Числові характеристики неперервної випадкової величини</u>	63
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	63

Четвертий змістовий модуль (ЗМ4): ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

<u>Лекція 7. Статистичне оцінювання параметрів розподілу</u>	64
7.1. Основні задачі математичної статистики	64
7.2. Генеральна та вибіркова сукупності	64
7.3. Статистичний розподіл вибірки та його графічні представлення. Емпірична функція розподілу.....	65
7.4. Числові характеристики вибірки.....	67
<u>Завдання для практичного заняття 14. Основні характеристики вибірки</u>	68
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	69
<u>Лекція 8. Інтервальне оцінювання параметрів розподілу</u>	69
8.1. Надійні інтервали	69
8.2. Надійний інтервал для математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії.....	70
8.3. Надійний інтервал для математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії.....	71
8.4. Надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення нормального розподілу при відомому математичному сподіванні.....	72
8.5. Надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення нормального розподілу при невідомому математичному сподіванні.....	72
<u>Завдання для практичного заняття 15. Знаходження надійних інтервалів параметрів розподілу</u>	74
<u>Завдання для домашньої роботи студентів</u>	74
<u>Завдання для практичного заняття 16. Модульна контрольна робота №2</u>	75
Додатки 1 – 6.....	84
Список рекомендованої та використаної літератури.....	90

ВСТУП

Теорія ймовірностей та математична статистика – математичні науки, які вивчають закономірності в масових випадкових явищах, – це складова теоретичної основи викладання багатьох економічних, соціологічних та спеціальних дисциплін.

Мета даного посібника – ознайомити студентів, а також усіх зацікавлених, з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей і математичної статистики, допомогти їм набуті первинних навичок застосування теоретичного матеріалу на практиці.

У посібнику представлено весь теоретичний та практичний матеріал, що повністю відповідає навчальній дисципліні «Теорія ймовірностей і математична статистика» напряму підготовки «Маркетинг».

Викладення матеріалу проводиться відповідно до вимог кредитно-модульної системи навчання. При цьому автор намагалась зробити так, щоб посібник було зручно читати в тому чи іншому об'ємі, залежно від потреб студента. Для кращого сприйняття матеріалу всі необхідні теоретичні відомості, представлені у даних методичних вказівках, проілюстровані великою кількістю розв'язаних прикладів.

До кожного теоретичного розділу наведено детальні алгоритми розв'язання основних задач, підібрано значну кількість завдань для аудиторної та домашньої роботи студентів. Також представлені індивідуальні завдання для написання модульних контрольних робіт. У додатках наведено необхідний довідковий матеріал.

Така побудова книги сприяє кращому засвоєнню програмного матеріалу, як під час аудиторних занять, так і при самопідготовці.

Даний методичний посібник буде гарною основою для отримання теоретичних знань і практичних навичок студентів, сприятиме виробленню умінь і навичок щодо їхнього використання у практиці управління.

Модуль 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Перший змістовий модуль (ЗМ1): ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Лекція 1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1. Предмет теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності притаманні масовим випадковим явищам.

Предметом теорії ймовірностей є математичні моделі випадкових явищ. При цьому під випадковим явищем розуміють явище, передбачити результат якого неможливо. *Приклади випадкових явищ*: випадання герба при підкиданні монети, виграш по купленому лотерейному квитку, тривалість роботи телевізора і т.п.

Метою теорії ймовірностей є здійснення прогнозу в області випадкових явищ, дослідження впливу на хід цих явищ, їх контроль, обмеження сфери дії випадковості. Нині немає практично жодної галузі науки, в якій не застосовувалися б імовірнісні методи.

Складність теорії ймовірностей полягають в тому, що об'єкти, які є предметом її вивчення, носять більш загальний характер і тому не настільки наочні, як, наприклад, об'єкти геометрії або механіки.

Прийнято вважати, що теорія ймовірностей своєму виникненню зобов'язана азартним іграм. Хоча, в будь-якому випадку, теорія ймовірностей і математична статистика з'явилися завдяки потребам практики.

Перші серйозні роботи по теорії ймовірностей як математичної науки були закладені в XVII ст. у працях Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, Я. Бернуллі. Пізніше, у XVIII – XIX ст. розвиток теорії ймовірностей спонукали задачі теорії стрільби, теорії похибок, проблеми демографії, тощо. Значного розвитку вона досягла в XIX – XX ст. завдяки працям А. Муавра, П. Лапласа, К. Гауса, С. Пуассона та інших вчених.

Сучасний період розвитку теорії ймовірностей почався із установлення аксіоматики. Цього в першу чергу вимагала практика, тому що для успішного застосування теорії ймовірностей до фізики, біології й інших галузей науки, а також до техніки й військової справи необхідно було уточнити й привести в струнку систему її основні поняття. В наш час методи теорії ймовірностей широко застосовуються в теорії надійності, теорії масового обслуговування, теорії інформації, статистичній фізиці, математичній статистиці та інших галузях знань.

Теорія ймовірностей складається з двох розділів: *випадкові події* і *випадкові величини*.

1.2. Випадкові події та їх класифікація

Випадковою подією називають будь-який результат випробування, який може відбутися або не відбутися взагалі.

Прикладами випробувань, наприклад, є: постріл з гвинтівки, підкидання грального кубика. Їм відповідають такі випадкові події: попадання в ціль або промах, поява того чи іншого числа очок на верхній грані кубика.

Для позначення подій використовують великі літери латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$, а у випадку їх великої кількості – літери з індексами: $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Подія називається **достовірною**, якщо в даному випробуванні вона обов'язково настане і **неможливою**, якщо в даному випробуванні вона завідомо не може відбутися. Так, наприклад, при вилученні кулі з урни, в якій всі кулі білі подія A – виймуть білу кулю є достовірною подією; а подія B – виймуть чорну кулю – неможливою подією.

Дві події вважаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої (не зможуть відбутися разом) в одному і тому ж випробуванні. В протилежному випадку події є **сумісними**.

Наприклад, при одноразовому підкиданні грального кубика подія A – поява чотирьох очок і подія B – поява парного числа очок є сумісними подіями.

Дві події, які зустрічаються в одному випробуванні, називають **незалежними**, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулась чи не відбулась інша подія. В іншому випадку, події – **залежні**.

Дві події вважаються **протилежними**, якщо в даному випробуванні вони несумісні і одна з них обов'язково відбувається.

Подію, протилежну події A , позначають через $\bar{A}$.

1.3. Класичне означення ймовірності появи події

Мірою можливості появи події є її ймовірність. В умовах класичної ймовірнісної схеми **ймовірністю появи події A** називають відношення кількості сприятливих випадків до загальної кількості всіх рівноможливих випадків у даному експерименті, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.3.1)$$

де m – кількість сприятливих випадків щодо появи події A ,

n – загальна кількість всіх рівноможливих випадків щодо події A .

Літера P походить від французького *probabilite* – ймовірність.

Приклад 1.3.1.

В сірниковій коробочці лежать 12 білих та 8 чорних гудзиків. Яка ймовірність того, що навмання вийнятий з коробочки гудзик буде білим?

Розв'язання: Нехай подія A – вийнятий гудзик білий.

Зрозуміло, що $n=12+8=20$ – кількість всіх рівноможливих випадків появи події.

Кількість сприятливих випадків появи події A складає 12, тобто $m=12$.

Отже, згідно формули (1.3.1) маємо: $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$.

З класичного означення ймовірності випливають наступні властивості:

1. **Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці.**
2. **Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.**
3. **Ймовірність випадкової події завжди має значення з проміжку від нуля до одиниці, тобто**

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Значення m і n знаходять або безпосередньо з умов випробування, або при розв'язуванні багатьох задач із застосуванням формул та правил комбінаторики.

1.4. Формули і правила комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає питання розташування та вибору об'єктів за певними правилами, і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна зробити.

Основні формули комбінаторики:

Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину, що складається з n елементів. Кількість перестановок з n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою:

$$P_n = n!, \quad (1.4.1)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$, $0! = 1$.

Розміщенням з n елементів по k ($k \leq n$) вважається впорядкована k елементна підмножина n -елементної множини, елементи якої відрізняються між собою або порядком.

Число розміщень з n елементів по k позначають A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.4.2)$$

Комбінацією (сполученням) з n елементів по k ($k \leq n$) називають будь-яку k елементну підмножину n -елементної множини, в якій порядок елементів не враховується. Число різних таких комбінацій позначають C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (1.4.3)$$

$$\text{причому } C_n^1 = n, \quad C_n^n = C_n^0 = 1, \quad C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Приклад 1.4.1.

У футбольній лізі 15 команд. Скількома способами золота, срібна і бронзова медалі можуть бути розподілені між цими командами?

Розв'язання:

Оскільки медалі різні (золота, срібна і бронзова), то шукане число кількості способів буде рівне згідно формули (1.4.2):

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730.$$

Приклад 1.4.2.

Скількома способами 4 різні книги можна розставити на полиці?

Розв'язання: Кількість таких способів дорівнює числу перестановок з 4-х елементів, тобто згідно формули (1.4.1), маємо:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Приклад 1.4.3.

У ящику лежать 10 однакових деталей. Скількома способами можна вийняти навмання з цього ящика 2 деталі?

Розв'язання: Шукана кількість способів дорівнює згідно формули (1.4.3):

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Основні правила комбінаторики

Правило суми: Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B можна вибрати n способами, то один з об'єктів **або** A **або** B можна вибрати $(m + n)$ способами.

Правило добутку: Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами і після кожного такого вибору інший об'єкт B можна вибрати (незалежно від вибору об'єкта A) n способами, то пари об'єктів A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Правила суми та добутку можна застосовувати для будь-якого скінченного числа множин.

Приклад 1.4.4.

У їдальні на обід пропонують на вибір 4 перших страви, 5 других і 3 третіх. Скількома способами можна собі обрати обід із трьох страв, щоб до нього входили перша, друга і третя страви?

Розв'язання: Одну першу страву з 4-х можна вибрати C_4^1 способами. Аналогічно, одну другу страву з 5-х існуючих можна обрати C_5^1 способами і одну третю страву з 3-х існуючих можна вибрати C_3^1 способами.

Тоді за правилом добутку обід із трьох страв, у якому були б перша, друга і третя страви можна обрати:

$$C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60 \text{ способами}.$$

Приклад 1.4.5.

У коробці лежать 5 синіх, 4 червоних і 3 зелених олівці. Навмання виймають 3 олівці. Скількома способами це можна зробити, якщо:

- а) всі вийняті олівці одного кольору;
- б) всі вийняті олівці різних кольорів;
- в) серед них 2 синіх і 1 зелений олівець?

Розв'язання:

$$\text{а) } C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{4!}{1! \cdot 3!} + \frac{3!}{0! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} + 4 + 1 = 15;$$

$$\text{б) } C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60;$$

$$\text{в) } C_5^2 \cdot C_3^1 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 3 = 30.$$

Завдання для практичного заняття 1

Елементи комбінаторики

1. Обчислити: а) $\frac{A_8^3 + A_6^2}{A_5^2}$; б) $\frac{P_5 - P_4}{4!}$; в) $C_7^5 + C_3^2$; г) $A_9^2 + 2C_{10}^0$.
2. Студенти першого курсу вивчають 9 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять для цих студентів на понеділок, якщо в цей день слід запланувати 3 лекції з різних предметів?
3. На секції математики студентської наукової конференції побажали виступити з доповідями шість студентів. Скількома способами їхні доповіді можна розмістити в програмі конференції, щоб вони стояли поруч?
4. Скількома способами можна нагородити п'ятьма однаковими грошовими преміями 10-х кращих працівників підприємства?
5. Скількома способами можна розкласти 5 різних листів у 5 різних конвертів, якщо в кожен конверт вкладати лише 1 лист?
6. Скільки треба мати словників, щоб можна було робити переклади з будь-якої із шести іноземних мов на будь-яку іншу з них?
7. Скількома способами можна розподілити пари з теорії ймовірностей у шести групах студентів між трьома викладачами, якщо кожен викладач має вести пари в двох групах?
8. Скільки сигналів можна подати п'ятьма різними прапорцями, піднімаючи їх в будь-якій кількості і в довільному порядку?
9. Скількома способами можна вибрати навімання одну квітку з кошика, в якому наявні 7 гвоздик, 8 троянд і 4 хризантеми?
10. Скількома способами з колоди в 36 карт можна навімання вибрати 4 карти, щоб серед них були:
 - а) три карти хрестової масті;
 - б) дві карти бубнової та одна чирвової масті;
 - в) всі карти різної масті.
11. У ящику лежать 20 деталей, серед яких 4 браковані. Скількома способами з цього ящика можна навімання вибрати:
 - а) п'ять деталей;
 - б) одну браковану і чотири стандартні;
 - в) вісім деталей, серед яких 5 стандартних;
 - г) шість деталей, серед яких хоча б дві браковані;
 - д) дві однакові за якістю деталі?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Обчислити n , якщо $A_n^5 = 20A_{n-1}^4$.

2. На п'ять співробітників хімічної лабораторії виділено три оздоровчі путівки. Скількома способами їх можна розподілити між працівниками, якщо:

- а) всі путівки різні;
- б) всі путівки однакові?

3. У букеті 7 червоних і 8 жовтих троянд. З букета навмання виймають 4 троянди. Скількома способами це можна зробити, якщо відомо, що вийняті троянди одного кольору?

4. Скількома способами можна розставити на ігровому полі 6 баскетболістів?

5. Із 3-ох інженерів та 5-ти економістів повинна бути складена комісія у складі 3-х осіб. Скількома способами можна створити таку комісію, якщо в неї повинен обов'язково входити хоча б один інженер?

Завдання для практичного заняття 2

Класичний спосіб обчислення ймовірності появи події

1. На одному з телеканалів у години пік на рекламу відводять 15 хв із кожної години телеефіру. Яка ймовірність того, що, увімкнувши цей канал у довільний момент часу в години пік, можна натрапити на рекламу?

2. Марина вирішила покататись на оглядовому колесі. Всього на колесі 40 кабінок огляду: 20 синього кольору, 15 – червоного і 5 – жовтого. Колесо не зупиняється, щоб взяти на свій “борт” пасажирів, його швидкість дає змогу пасажирам входити і виходити на рівні землі. Марина сідає у першу вільну кабінку. Знайдіть ймовірність того, що Марина кататиметься у червоній кабінці.

3. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде кількість очок кратна трьом.

4. У під'їзді 80 квартир, по 5 на кожному поверсі. Для проведення опитування соціолог навмання обирає квартиру. Яка ймовірність того, що ця квартира розташована на першому, другому або третьому поверсі?

5. В ящику лежали 5 апельсинів і 4 яблука. Навмання з ящика вийняли 3 фрукти. Яка ймовірність того, що всі три вийняті фрукти є апельсинами?

6. У шухляді лежать ложки і виделки, причому виделок у 2 рази більше, ніж ложок. Яка ймовірність того, що взятим навмання предметом буде виделка?

7. Академічна група складається з 20 студентів, серед яких 3 дівчини. Для походу в театр навмання обирають 5-х студентів. Яка ймовірність того, що серед вибраних студентів будуть 3 хлопці?

8. На складі паливно мастильних матеріалів знаходяться 10 каністр з бензином та 5 з дизельним паливом. Яка ймовірність того, що в трьох навмання взятих каністрах виявиться паливо одного виду?

9. Із колоди в 36 карт навмання виймають 3 карти. Яка ймовірність того, що серед них точно буде один туз?

10. Деяка партія товару складається з 5-ти виробів першого сорту та 4-х виробів другого сорту. Знайти ймовірність того, що 2 навмання взяті вироби з цієї партії виявляться одного сорту.

11. В урні знаходяться 10 червоних, 6 синіх і 3 зелені кулі однакового розміру. З урни навмання вийняли 6 куль. Яка ймовірність того, що серед них 1 зелена, 2 сині та 3 червоні кулі?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Дмитро забув останню цифру PIN – коду своєї банківської картки. Знайдіть ймовірність того, що Дмитро з першої спроби отримає доступ до системи, якщо набиратиме останню цифру навмання.

2. У пеналі лежали 15 синіх і 10 жовтих олівців. З пеналу навмання взяли 5 олівців, які виявились жовтими. Яка ймовірність того, що наступний навмання узятий олівець також буде жовтим?

3. В букет складені 8 троянд, 6 гвоздик і 3 ромашки. З букету навмання виймають квіти. З якою ймовірністю можна вийняти:

- а) одну ромашку;
- б) дві троянди;
- в) три квітки одного сорту;
- г) три квітки різних сортів;
- д) три троянди й дві ромашки;
- е) три квітки, серед яких принаймні одна гвоздика?

Лекція 2. Ймовірність суми і добутку випадкових подій

2.1. Теореми додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій

Сумою декількох подій називають подію, яка означає появу хоча б однієї з цих подій.

Теореми додавання ймовірностей по-різному формулюються для несумісних та сумісних подій.

Дві події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої (не зможуть відбутися разом) в одному і тому ж випробуванні. В протилежному випадку події називаються **сумісними**.

Теорема 1. **Ймовірність появи хоча б однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.1.1)$$

З цієї теореми випливають декілька наслідків:

Наслідок 1. Якщо випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ - попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (2.1.2)$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій A і $\bar{A}$ дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (2.1.3)$$

Теорема 2. **Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (2.1.4)$$

Теорема 2 може розповсюджуватися на будь-яку кількість сумісних подій.

2.2. Теорема множення ймовірностей для незалежних та залежних подій

Добутком декількох подій називають подію, яка означає спільну появу всіх цих подій.

Теорема множення ймовірностей по-різному формулюються для незалежних та залежних подій.

Дві події в одному випробуванні називаються **незалежними**, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулась чи не відбулась інша подія. В іншому випадку, події – **залежні**.

Для характеристики залежних подій вводять поняття **умовної ймовірності**.

Ймовірність події A , обчислена за умови, що подія B відбулась називається **умовною ймовірністю** події A і позначається $P_B(A)$.

Аналогічно, умовна ймовірність появи події B , за умови, що відбулась подія A , позначається символом $P_A(B)$.

Теорема 3. Ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.2.1)$$

Теорема 4. Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія вже відбулась:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (2.2.2)$$

Наслідком теорем додавання та множення ймовірностей є формула для обчислення ймовірності появи в результаті випробування хоча б однієї із незалежних у сукупності подій $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n), \quad (2.2.3)$$

де $P(\bar{A}_1), P(\bar{A}_2), \dots, P(\bar{A}_n)$ – ймовірності протилежних подій.

Приклад 2.2.1.

На змаганнях зі стрільби стрілець влучає в десятку з ймовірністю 0,03, в дев'ятку – з ймовірністю 0,2, у вісімку – з ймовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілець набере більше восьми очок?

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – стрілець влучив у дев'ятку,

B – стрілець влучив у десятку .

Тоді $(A + B)$ – влучення в дев'ятку або десятку при одному пострілі.

Події A і B – несумісні, тому:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,2 + 0,03 = 0,23.$$

Приклад 2.2.2.

Підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність появи при цьому хоча б однієї шістки?

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – поява шістки на першому кубику,

B – поява шістки на другому кубику.

Тоді $(A + B)$ – поява хоча б однієї шістки при підкиданні кубиків.

Події A і B – сумісні, тому:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

A і B – незалежні події, тому:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

Цю ж задачу можна також розв'язати іншим способом, а саме, скориставшись наслідком з теорем додавання та множення ймовірностей (2.2.3). Тобто:

$$P(C) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Приклад 2.2.3.

Ймовірність виживання одного організму протягом 20 хвилин становить 0,7. У пробірці зі сприятливими для існування цих організмів умовами знаходяться 2 організми. Яка ймовірність того, що через 20 хвилин вони обидва залишаться живими?

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – перший організм у пробірці лишиться живим через 20 хвилин,

B – другий організм у пробірці лишиться живим через 20 хвилин.

Будемо вважати, що між організмами немає внутрішньовидової конкуренції, тобто події A і B – незалежні, тоді

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49.$$

Приклад 2.2.4.

З колоди карт (36 шт) навмання, одну за одною, виймають дві карти. Яка ймовірність того, що вийняли 2 вальти?

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – перша вийнята карта є валетом,

B – друга вийнята карта є валетом.

Події A і B в даному випадку – залежні, тому:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

У нашому випадку маємо:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P_A(B) = \frac{3}{35}.$$

Тоді

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{35} = \frac{3}{315} = \frac{1}{105}.$$

При розв'язуванні деяких задач на обчислення ймовірностей доводиться поєднувати теореми додавання і множення.

Приклад 2.2.5.

Ймовірність того, що японський автовиробник (лідер світових продажів) має можливість реалізовувати свою продукцію через експорт до України, складає 0,7, до Польщі – 0,8, до США – 0,85. Знайти ймовірність того, що підприємство буде експортувати свою продукцію: а) лише до однієї країни; б) принаймні до двох країн.

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A – можливість реалізації автомобілів японського виробника лише до однієї країни,

A_1 – експорт продукції до України,

A_2 – експорт продукції до Польщі,

A_3 – експорт продукції до США.

За умовою задачі $P(A_1) = 0,7$, тоді ймовірність протилежної події:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Аналогічно, якщо $P(A_2) = 0,8$, тоді $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Оскільки $P(A_3) = 0,85$, то $P(\bar{A}_3) = 1 - 0,85 = 0,15$.

Так як події A_1, A_2, A_3 – несумісні та незалежні, тому:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + \\ &+ P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ &= 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,85 = 0,108. \end{aligned}$$

Подія B – можливість реалізації продукції принаймні до двох країн (будь-які дві або три).

Тоді

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3) = \\ &= 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,15 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,85 + 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,883. \end{aligned}$$

Завдання для практичного заняття 3

Застосування теорем додавання та множення ймовірностей подій

1. На клумбі ростуть 20 червоних, 30 жовтих та 40 білих айстр. Яка ймовірність зірвати в темряві одну жовту або червону айсту?
2. Віра Іванівна розпочинає боротьбу з надмірною вагою. Першим кроком на шляху до стрункої фігури має стати щоденна заборона відкривати холодильник після шостої години вечора. Це їй вдається робити з ймовірністю 0,6. Яка ймовірність того, що протягом наступних трьох днів у зазначений час Віра Іванівна жодного разу не відкриє холодильник?
3. У кейсі лежать 20 дисків із записами музики в стилі диско і 10 дисків з музикою у стилі техно. Ді-джей наважиться витягнути з кейсу по черзі, один за одним, 2 музичні диски. Яка ймовірність того, що на двох вилучених з кейсу дисках записана музика в стилі диско?
4. Біля деканату стоять 15 студентів. Із них 9 відмінників, а решта – двієчники. Заступник декана викликає до себе по-одному студенту. Через деякий час у нього в кабінеті опинилося 3 студенти. Обчислити ймовірність того, що усі вони – двієчники.
5. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,8, а другим – 0,7. Стрільці, незалежно один від одного, зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що при цьому принаймні один стрілець влучив у мішень?
6. У кошику лежать 12 яблук – 8 яблук сорту Джонатан та 4 яблука сорту Голден. Петро наважиться дістати з кошика одне яблуко, яке дав сестрі, після чого наважиться дістати з кошика ще одне яблуко для себе. Яка ймовірність того, що сестрі дісталось яблуко сорту Джонатан, а Петру – яблуко сорту Голден?
7. В ящику 10 червоних і 6 синіх гудзиків. Навмання виймають два гудзики. Визначити ймовірність того, що гудзики будуть одного кольору.
8. У партії з 20 деталей є 16 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих трьох деталей виявиться принаймні одна стандартна.
9. Студент прийшов на екзамен, підготувавши 20 з 25 питань програми. Екзаменатор задав йому по черзі один за одним три запитання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі три задані питання.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. В одному ящику лежать 3 білих і 5 чорних куль, а в іншому ящику – 6 білих і 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б з одного ящика буде вийнято білу кулю, якщо з кожного ящика вийнято по одній кулі.
2. Яка ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде парна кількість очок або число кратне трьом?
3. Майстер, маючи 10 деталей, з яких 3 – нестандартні, бере і перевіряє деталі одну за одною, поки не натрапить на стандартну деталь. Яка ймовірність того, що він перевірить 2 деталі?

Завдання для практичного заняття 4

Спільне використання теорем додавання і множення ймовірностей на практиці

1. Автостанція протягом доби виконує два рейси до Одеси. Ймовірність затримки першого рейсу дорівнює 0,1; другого – 0,15, причому затримка одного рейсу не залежить від іншого. Знайти ймовірність того, що:

- а) жоден рейс не затримано;
- б) затримали лише один рейс;
- в) затримали принаймні один рейс.

2. Три студенти здають екзамен з фізики. Ймовірність успішної здачі цього екзамену для першого студента становить 0,65, для другого студента – 0,8 і для третього – 0,85. Яка ймовірність того, що:

- а) екзамен успішно складуть лише 2 студенти;
- б) екзамен успішно складе хоча б один студент?

3. Заводом відправлені автомобілі для закупівлі сировини на чотири підприємства. Ймовірність наявності потрібної сировини на першому підприємстві дорівнює 0,6, на другому – 0,95, на третьому – 0,8, на четвертому – 0,75. Знайти ймовірність того, що:

- а) тільки на одному підприємстві не буде потрібної сировини;
- б) принаймні на одному підприємстві не буде сировини;
- в) на трьох підприємствах буде потрібна сировина.

4. На будівництво надійшла велика партія цементу, розфасованого в мішки по 50 кг. Нормальною вважається маса від 49,95 кг до 50,05 кг. Ймовірність того, що маса мішка менша 49,95 кг дорівнює 0,1; більша 50,05 кг – 0,05. Навмання взято два мішки з цієї партії. Знайти ймовірність того, що:

- а) вони обидва мають нормальну масу;
- б) маса обох мішків не відповідає нормі.

5. Три стрільці одночасно стріляють по одній і тій самій мішені. Ймовірність влучення у мішень для першого стрільця складає 0,4, для другого – 0,5, а для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що:

- а) в мішень влучить лише один стрілець;
- б) в мішень влучать два стрільці;
- в) в мішень влучать три стрільці;
- г) не влучить жоден стрілець.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Троє гравців грають у дартс. Ймовірність влучення в «яблучко» для першого гравця складає 0,6, для другого гравця – 0,8, а для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що в «яблучко» влучать:

- а) принаймні один гравець;
- б) три гравці;
- в) лише один гравець;
- г) двоє гравців.

Лекція 3. Априорні та апостеріорні ймовірності гіпотези

3.1. Формула повної ймовірності

Якщо подія A має складну структуру, то пряме визначення її ймовірності за класичним означенням може виявитись надто важким завданням. У такому випадку виникає питання про можливість розглянути подію A разом з іншими подіями, ймовірності яких відомі, і на основі розглянутих подій знайти ймовірність події A . Виявляється, що це можливо, і відповідь на поставлене питання дає формула повної ймовірності.

Нехай подія A може відбутись лише одночасно з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій H_i відбудеться подія A , то події H_i називаються **гіпотезами**.

Якщо ймовірності гіпотез задані або їх можна обчислити з умов випробування, то ймовірність події A можна обчислити за **формулою повної ймовірності**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \quad (3.1.1)$$

де $P(H_i)$ – ймовірності гіпотез H_i ;

$P_{H_i}(A)$ – умовні ймовірності події A , обчислені за умови, що відповідна гіпотеза H_i відбулась.

При розв'язуванні задач на знаходження повної ймовірності варто дотримуватись такої послідовності:

- 1) визначити гіпотези і знайти їх ймовірності (якщо гіпотези рівноможливі, то їх ймовірності рівні, а якщо нерівноможливі, їх ймовірності різні, але в обох випадках сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці);
- 2) знайти умовні ймовірності;
- 3) скористатись формулою повної ймовірності.

Приклад 3.1.1.

На трьох автоматичних верстатах виготовляються однакові деталі. Відомо, що 30% продукції виробляється першим верстатом, 25% – другим і 45% – третім. Ймовірність виготовлення деталі, що відповідає стандарту, на першому верстаті дорівнює 0,99, на другому – 0,988 і на третьому – 0,98. Виготовлені протягом дня на трьох верстатах невідсортовані деталі знаходяться на складі. Визначити ймовірність того, що взята навмання деталь не відповідає стандарту.

Розв'язання.

Нехай подія A – вибрана навмання деталь не відповідає стандарту.

Гіпотези: H_1 – вибрана деталь виготовлена на першому верстаті;

H_2 – вибрана деталь виготовлена на другому верстаті;

H_3 – вибрана деталь виготовлена на третьому верстаті.

За умовою задачі: $P(H_1) = 0,3$, $P(H_2) = 0,25$, $P(H_3) = 0,45$.

Перевірка: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0,3 + 0,25 + 0,45 = 1$.

Умовні ймовірності події A відповідно дорівнюють:

$P_{H_1}(A) = 1 - 0,99 = 0,01$ – ймовірність того, що вибрана нестандартна деталь була виготовлена першим верстатом,

$P_{H_2}(A) = 1 - 0,988 = 0,012$ – ймовірність того, що вибрана нестандартна деталь була виготовлена другим верстатом,

$P_{H_3}(A) = 1 - 0,98 = 0,02$ – ймовірність того, що вибрана нестандартна деталь була виготовлена третім верстатом.

Використовуючи формулу повної ймовірності (3.1.1), знаходимо ймовірність того, що вибрана навмання деталь не відповідає стандарту:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = \\ &= 0,3 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,012 + 0,45 \cdot 0,02 = 0,015. \end{aligned}$$

3.2. Формули Байєса

Якщо випробування, в якому спостерігалася подія A , відбулося, і необхідно переоцінити правильність ймовірностей гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, то для цього застосовують **формули Байєса**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.1)$$

де $P(A)$ – повна ймовірність події A .

Ймовірності подій-гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, знайдені до початку даного випробування ($P(H_i), i = 1, 2, \dots, n$), називають **апріорними**. Ймовірності гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, знайдені після того як стали відомі результати випробування ($P_A(H_i), i = 1, 2, \dots, n$) називають **апостеріорними**.

Приклад 3.2.1.

Перший верстат виготовляє у два рази більше продукції, ніж другий, і в три рази більше, ніж третій. При цьому в роботі першого верстата у середньому помічають 3 браковані вироби зі 100, у другого – 2 з 50 виробів, у третього – 3 з 60 виробів. Взята навмання деталь виявилася бракованою. Яким верстатом її ймовірніше за все виготовлено?

Розв'язання.

Нехай подія A – взята деталь бракована.

Гіпотези: H_1 – деталь виготовлена на першому верстаті;

H_2 – деталь виготовлена на другому верстаті;

H_3 – деталь виготовлена на третьому верстаті.

Позначимо

$$P(H_1) = x, \text{ тоді } P(H_2) = \frac{x}{2}; \quad P(H_3) = \frac{x}{3}.$$

Події (гіпотези) H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу, тому:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1,$$

звідки знаходимо $\frac{11x}{6} = 1, \quad x = \frac{6}{11}.$

Отже, $P(H_1) = \frac{6}{11}; \quad P(H_2) = \frac{3}{11}; \quad P(H_3) = \frac{2}{11}.$

Умовні ймовірності події A знайдемо за класичним означенням ймовірності:

$$P_{H_1}(A) = \frac{3}{100} = 0,03; \quad P_{H_2}(A) = \frac{2}{50} = 0,04; \quad P_{H_3}(A) = \frac{3}{60} = 0,05.$$

За формулою повної ймовірності (3.1.1) маємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{6}{11} \cdot 0,03 + \frac{3}{11} \cdot 0,04 + \frac{2}{11} \cdot 0,05 = \frac{1}{11} (0,18 + 0,12 + 0,1) = \frac{2}{55}.$$

Далі за формулами Байєса (3.2.1) обчислимо ймовірності того, що браковану деталь виготовлено першим, другим, чи третім верстатом:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{11} \cdot 0,03}{\frac{2}{55}} = 0,45;$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{11} \cdot 0,04}{\frac{2}{55}} = 0,3;$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{11} \cdot 0,05}{\frac{2}{55}} = 0,25.$$

Оскільки $P_A(H_1) > P_A(H_2) > P_A(H_3)$, то, наймовірніше за все, узята бракована деталь виготовлена першим верстатом.

Завдання для практичного заняття 5

Практичне застосування формули повної ймовірності

1. Двигун автомобіля може працювати в трьох режимах: нормальному, форсованому, недовантаженому. Нормальний режим має місце у 60% випадків, форсований – у 10 %, а недовантажений – у 30% випадків. Надійність роботи двигуна (ймовірність безвідмовної роботи протягом заданого часу t) складає для нормального режиму $p_1 = 0,90$, для форсованого – $p_2 = 0,50$, для недовантаженого – $p_3 = 0,95$. Знайти повну надійність роботи двигуна.

2. Три екзаменатори приймають іспит з деякого предмету у групи студентів, яка складається з 30-ти чоловік, причому перший екзаменатор опитує 6-ох студентів, другий – 3-х студентів, а третій – 21-го студента (вибір студентів проводиться випадковим чином зі списку). Ставлення трьох екзаменаторів до слабо підготовлених студентів різне: шанси таких студентів скласти іспит у першого викладача рівні 40%, у другого – лише 10%, у третього – 70%. Знайти ймовірність того, що слабо підготовлений студент складе іспит.

3. 60% деяких виробів контролюються першим експертом, а 40% – другим. Ймовірності бракування дефектного виробу для першого та другого експерта відповідно складають 0,9 та 0,7. Ймовірності помилкового бракування виробу, що немає дефекту, дорівнюють відповідно для кожного експерта 0,02 та 0,11. Знайти ймовірності того, що:

- а) дефектний виріб забракують;
- б) забракують якісний виріб.

4. На столі стоять 3 ящики з кулями. У першому ящику лежать 4 білі і 5 чорних куль, у другому – 5 білих і 4 чорних, у третьому – 6 білих куль. Навмання вибрали один ящик і вийняли з нього одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла.

5. Стрільцю запропонували 5 гвинтівок, три з яких з оптичним прицілом. Ймовірність влучення у мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність складає 0,7. Знайти ймовірність влучення стрільцем у мішень з гвинтівки, вибраної навмання.

6. Десять студентів розв'язують задачу. З них 2 студенти вчаться на «відмінно» (перша група), п'ять на «добре» (друга група) і три на «задовільно» (третья група). Ймовірність того, що задача буде розв'язана студентом з першої групи, дорівнює 0,9; другої групи – 0,8; третьої групи – 0,5. Яка ймовірність розв'язання задачі одним зі студентів?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. На склад надходить однакова кількість електричних ламп з кожного з двох заводів. Відомо, що перший завод випускає 95%, а другий – 92% стандартної продукції. Знайти ймовірність того, що узята навмання на складі електролампа виявилась стандартною.

2. Підприємство має трьох постачальників комплектуючих – фірми *A*, *B* та *C*. На частку фірми *A* припадає 50% загального обсягу поставок, на частку фірми *B* – 30% і на частку фірми *C* – 20%. З практики відомо, що серед поставлених фірмою *A* деталей 10% браковані, фірмою *B* – 5% і фірмою *C* – 6%. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться придатною?

Завдання для практичного заняття 6 ***Застосування формул Байєса***

1. Автомеханічний склад одержує від першого заводу в 4 рази більше агрегатів, ніж від другого. Брак у продукції першого заводу складає 4%, а у продукції другого – 8%. Випадковим способом вибраний агрегат виявився бракованим. Яким заводом він ймовірніше за все виготовлений?

2. На заводі по виготовленню соняшникової олії встановлено вітчизняний та імпортований автомати розливу, продуктивності яких відносяться, як 4:6. Пляшки з олією надходять на загальний конвеєр. При цьому вітчизняний автомат дає в середньому 5% браку, а імпортований – 2%. Навмання взята з конвеєра пляшка олії виявилась ушкодженою. Яка ймовірність того, що олія в неї розлита імпортованим автоматом?

3. Дві секретарки заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність того, що помилки в документі зробить перша секретарка становить 0,05, а друга – 0,1. Перша секретарка заповнила 20 документів, а друга – 30. Навмання взятий документ виявився бракованим. Визначити ймовірності того, що його заповнювала перша секретарка.

4. У трьох однакових контейнерах містяться стартери. У першому контейнері 2% некондиційних стартерів, у другому – 3%, в третьому – 1%. Із навання вибраного контейнера взято один стартер, який виявився некондиційним. Яка ймовірність того, що цей стартер взято з третього контейнера ?

5. Вісімдесят відсотків всіх приладів складаються з високоякісних деталей, а двадцять відсотків – з деталей звичайної якості. Якщо прилад зібрано з високоякісних деталей, то ймовірність його безвідмовної роботи протягом певного часу t дорівнює 0,9. Якщо прилад зібрано з деталей звичайної якості, то ймовірність – 0,5. При випробуванні протягом часу t прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що його зібрано з високоякісних деталей.

6. Два стрільці, незалежно один від одного, роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого складає 0,35, а другого – 0,7. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив другий стрілець.

7. До лікарні потрапляють у середньому 50% хворих, що мають захворювання А, 30% – захворювання В, 20% – захворювання С. Імовірність повного виліковування для хвороби А складає 0,7; для хвороби В – 0,8; для хвороби С – 0,9. Знайти ймовірність того, що хворий, який потрапив до лікарні і виписався через деякий час здоровим, мав захворювання А.

8. Автомобільне мастило розливають на двох технологічних лініях заводу. При цьому ймовірність виходу бракованої продукції з першої лінії складає 0,88, а з другої – 0,95. Навмання взята каністра мастила виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона розлита на другій лінії?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. У першій коробці лежать 10 патронів, 4 з яких – холості. У другій коробці лежать 15 патронів, з яких 3 холості. Знайти ймовірність того, що навання взятий холостий патрон був вилучений з першої коробки.

2. Якість продукції перевіряється одним із двох контролерів, продуктивності праці яких відносяться, як 3:2. Ймовірність того, що продукція буде визнана якісною першим контролером складає 0,95, а другим – 0,9. Продукція під час перевірки була визнана якісною. Знайти ймовірність того, що її перевірів:

- а) перший контролер;
- б) другий контролер.

Другий змістовий модуль (ЗМ2): ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Лекція 4. Формула Бернуллі та її граничні теореми

4.1. Повторні незалежні випробування. Схема Бернуллі

Якщо n випробувань проводити за однакових умов і ймовірність настання події A в усіх випробуваннях однакова та не залежить від настання або ненастання A в інших випробуваннях, таку послідовність незалежних випробувань називають **схемою Бернуллі**.

Розглянемо деяке стохастичне випробування, яке в однакових умовах проводиться n разів, причому при кожному його повторенні певна подія A може відбутися з однією і тією ж самою ймовірністю $p = P(A)$, або не відбутися з ймовірністю $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Такі випробування, в яких ймовірність того чи іншого результату в одному з них не залежить від результату інших, називають **повторними незалежними випробуваннями**.

Ймовірність того, що подія A відбудеться рівно k разів у n незалежних повторних випробуваннях позначається $P_n(k)$ і обчислюється за **формулою Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (4.1.1)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Нагадаємо, що тут для обчислення комбінації з n елементів по k застосовують формулу:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

Формула Бернуллі дозволяє обчислити не лише ймовірність появи події k разів у n незалежних випробуваннях, але і **ймовірність появи події A** :

- 1) **у всіх n випробуваннях:** $P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n} = C_n^n p^n q^0 = p^n$;
- 2) **нуль разів:** $P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n$;
- 3) **не більше m разів:** $P_n(k \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m)$;
- 4) **менше m разів:** $P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1)$;
- 5) **не менше m разів:** $P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n)$;
- 6) **більше m разів:** $P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n)$;
- 7) **не менше k_i разів і не більше k_j раз:**

$$P_n(m_i \leq k \leq m_j) = P_n(k_i) + P_n(k_{i+1}) + \dots + P_n(k_j);$$

- 8) **принаймні один раз:** $P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - q^n$.

Для різних k ймовірності $P_n(k)$ набувають різних значень. Число k_0 , при якому ймовірність $P_n(k_0)$ найбільша, називають **найімовірнішим числом настання події А**. Його визначають співвідношенням:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (4.1.2)$$

Число k_0 завжди має бути цілим.

Якщо $np + p$ – **ціле додатне число**, то k_0 має два значення, а саме:
 $k_0 = np - q$ та $k_0 = np + p$.

Якщо ж при підрахунках $np + p$ є **дробовим числом**, то k_0 набуває одного цілого значення з проміжку $np - q \leq k_0 \leq np + p$.

Приклад 4.1.1.

Ймовірність того, що в один день регіональне представництво Укравтодору в Київській області вкладеться в норму витрат на транспорт, дорівнює $\frac{3}{4}$. Яка ймовірність того, що лише в три дні робочого тижня воно вкладеться в норму витрат?

Розв'язання.

Один день робочого тижня можна розглядати як одне незалежне випробування, а весь робочий тиждень як послідовність $n = 5$ незалежних випробувань.

Подія A – регіональне представництво вкладеться в норму витрат на транспорт може настати з ймовірністю $p = \frac{3}{4}$, або не настати з ймовірністю

$q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ в одному незалежному випробуванні. Ймовірність того, що подія A настане рівно $k = 3$ рази в $n = 5$ незалежних випробуваннях обчислимо за формулою Бернуллі (4.1.1):

$$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3} = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \frac{27}{4^3 \cdot 4^2} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3!} \cdot \frac{27}{4^3 \cdot 4^2} = \frac{270}{1024} \approx 0,264.$$

Приклад 4.1.2.

Автошкола НТУ налічує 9 автомобілів. Відділ технічного контролю перевіряє стан кожного автомобіля перед його виходом у рейс. Ймовірність справності автомобіля в один з днів склала 0,85. Знайти найімовірніше число автомобілів, які зможуть вийти в рейс цього дня.

Розв'язання.

За умовою $n = 9$, $p = 0,85$, $q = 0,15$. Найімовірніше число k_0 автомобілів в робочому стані задовольняє подвійну нерівність:

$$\begin{aligned}np - q &\leq k_0 \leq np + p \\9 \cdot 0,85 - 0,15 &\leq k_0 \leq 9 \cdot 0,85 + 0,85, \\7,5 &\leq k_0 \leq 8,5.\end{aligned}$$

Оскільки $np + p = 8,5$, тобто є дробовим числом, то k_0 має бути цілим числом. Отже, найімовірніше в рейс можуть вийти 8 автомобілів.

4.2. Граничні теореми формули Бернуллі

Формула Бернуллі дає точні значення ймовірностей $P_n(k)$, проте при великих значеннях n вона приводить до громіздких обчислень. Тому, якщо число n досить велике, то для обчислення ймовірності появи події A k разів у n незалежних випробуваннях застосовують наближену **формулу локальної теореми Муавра-Лапласа**: якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A стала і не дорівнює нулю або одиниці ($p \neq 0$, $p \neq 1$), то ймовірність $P_n(k)$ наближено дорівнює значенню функції:

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

обчисленому при $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Позначимо $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, тоді остаточно матимемо формулу

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x). \quad (4.2.1)$$

На практиці цю формулу доцільно застосовувати при $npq \geq 10$.

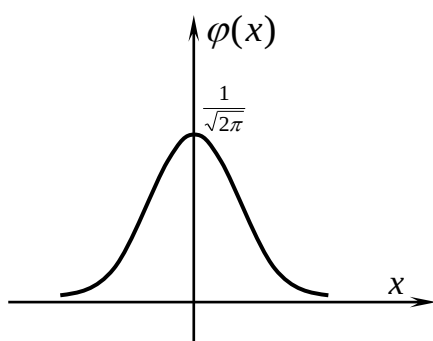


Рис. 4.2.1

Функція $\varphi(x)$ називається функцією Гаусса. Її графік зображено на рис. 4.2.1.

Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

У спеціальних таблицях (див. додаток 1) подані значення функції $\varphi(x)$, але лише для аргументів $0 \leq x \leq 4$. Для інших значень

аргументів приймають: $\varphi(x > 4) = 0$.

У деяких випадках необхідно обчислити ймовірність того, що у n випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$. Тоді застосовують **інтегральну теорему Муавра-Лапласа**: якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A стала і не дорівнює нулю або одиниці, то ймовірність $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ того, що в n випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 , але не більше k_2 раз наближено дорівнює:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (4.2.2)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, графік якої зображений на рис. 4.2.2.

Функція $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і значення функції $\Phi(x)$ наведені у спеціальних таблицях (див. додаток 2), причому для $x \geq 5$ вважають $\Phi(x) = 0,5$.

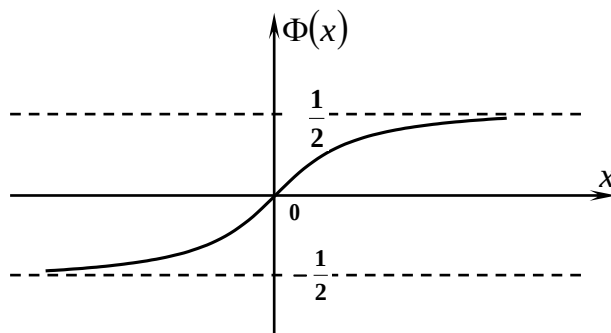


Рис. 4.2.2

Якщо число n проведених випробувань велике ($n \geq 50$), а ймовірність появи події A в кожному випробуванні досить мала $0 < p < 0,1$, то ймовірність появи події A в цих n незалежних повторних випробуваннях k разів обчислюють за **формулою Пуассона**:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (4.2.3)$$

де $\lambda = np$ – середнє число появ події A у n випробуваннях.

Значення $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ наводяться у спеціальних таблицях (див. додаток 3).

Приклад 4.2.1.

У масовому виробництві автомобільних шин ймовірність браку складає 0,1. Яка ймовірність того, що серед 500 відібраних шин буде 30 бракованих?

Розв'язання.

За умовою $n = 500$, $k = 30$, $p = 0,1$, $q = 1 - 0,1 = 0,9$.

Використовуючи локальну теорему Муавра-Лапласа (4.2.1), отримуємо:

$$P_{500}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 500 \cdot 0,1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = \frac{-20}{6,7} = -2,98.$$

За табл. 1 додатку знаходимо $\varphi(-2,98) = 0,0047$.

$$\text{Тому } P_{500}(30) \approx \frac{1}{6,7} \cdot 0,0047 \approx 0,001.$$

Приклад 4.2.2.

Ймовірність того, що відвідувач АЗС замовить бензин марки А-95, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 150 відвідувачів бензин А-95 замовлять не менше 75 і не більше 110 відвідувачів.

Розв'язання.

За умовою $n = 150$, $k_1 = 75$, $k_2 = 110$, $p = 0,8$, $q = 0,2$.

Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа (4.2.2):

$$np = 150 \cdot 0,8 = 120, \quad npq = 150 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 24, \quad \sqrt{npq} = 4,89,$$

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 120}{4,89} = -2,05, \quad \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 120}{4,89} = -9,20,$$

$$P_{150}(75 \leq k \leq 110) \approx \Phi(-2,05) - \Phi(-9,20) = -\Phi(2,05) + \Phi(9,20) = \\ = -0,47982 + 0,5 = 0,02018.$$

Приклад 4.2.3.

Якщо лівші в середньому складають 2% то яка ймовірність того, що серед 100 чоловік не більше трьох ліворуких?

Розв'язання.

Скористаємося граничною теоремою Пуассона (4.2.3).

За умовою $n = 100$, $p = 0,02$, $\lambda = np = 100 \cdot 0,02 = 2$.

$$\text{Тоді } P_{100}(0 \leq k \leq 3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) \approx$$

$$\approx \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} + \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} + \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} + \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} \approx$$

$$\approx 0,1353 + 0,2707 + 0,2707 + 0,1804 \approx 0,8571.$$

Завдання для практичного заняття 7

Практичне використання формули Бернуллі та її наслідків

1. Монету підкинуто 6 разів. Знайти ймовірність того, що при цьому герб випаде 4 рази.

2. Диспетчер відділу доставки піци отримує замовлення на фірмову піцу та деякі інші види піц. У середньому 40% клієнтів замовляють фірмову піцу. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання обраних замовлень буде лише одне замовлення на фірмову піцу.

3. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі складає 0,8. По мішені виконано чотири незалежних постріли. Знайти ймовірність того, що при цьому буде:

- а) хоча б одне влучення в мішень;
- б) не менше трьох влучень;
- в) не більше одного влучення.

4. На АЗС є п'ять заправних колонок. Ймовірність виходу з ладу кожної колонки протягом року складає 0,2. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться ремонтувати:

- а) нуль колонок;
- б) не більше двох колонок?

5. Бізнесмен, вивчивши попит ринку на нові сучасні спортивні автомобілі, вирішив продати пробну партію з дев'яти таких автомобілів. Ймовірність отримати високий прибуток від продажу кожної машини оцінена в 0,8. Яка ймовірність отримати високий прибуток від продажу:

- а) трьох автомобілів;
- б) не більше трьох автомобілів?

6. Ймовірність того, що витрата бензину автопарком протягом місяця не перевищує встановленої норми, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що за півроку роботи автопарк укладеться в норму витрат бензину протягом чотирьох місяців.

7. Знайти найімовірніше число нестандартних деталей, якщо випробовується 100 деталей, а ймовірність того, що деталь нестандартна дорівнює 0,1.

8. Військовий підрозділ стріляє по групі ворогів з 24 танків. Ймовірність того, що танк буде підбитий, дорівнює 0,6. Визначити найімовірніше число підбитих танків.

9. Співробітниками місцевої поліції було зібрано статистичні дані щодо тверезості водіїв за кермом (методом зупинення автомобілів навмання). Ймовірність виявлення нетверезого водія за кермом складає 10%. Яка ймовірність того, що з чотирьох перевірених водіїв у стані сп'яніння будуть перебувати два водії?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. У магазині працюють 5 холодильників. Імовірність виходу з ладу кожного холодильника протягом року складає 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом року ремонту вимагатиме:

- а) 4 холодильники;
- б) не менше 2-х холодильників;
- в) не більше 1 холодильника.

2. Випробовують кожен із 15 елементів деякого пристрою. Імовірність того, що кожен елемент витримає випробування складає 0,9. Знайти найбільш імовірне число елементів, які витримають випробування.

Завдання для практичного заняття 8

Застосування граничних теорем

1. Підручник надруковано тиражем 10000 примірників. Ймовірність бракованого брошурування підручника складає 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

2. Імовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що з 300 випробувань успішними будуть 75 випробувань?

3. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу рівна 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t із 100 приладів вийде з ладу від 6 до 18 приладів.

4. Імовірність того, що будь-який абонент зателефонує на комутатор протягом години, дорівнює 0,02. Телефонна станція обслуговує 200 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години зателефонують 3 абоненти?

5. Знайти ймовірність того, що при 1000 підкиданнях грального кубика випаде від 160 до 200 шісток.

6. Ймовірність того, що кожен відвідувач СТО замовить діагностику двигуна автомобіля, дорівнює 0,64. Знайти ймовірність того, що із 100 відвідувачів замовлять цю діагностику:

- а) не менше 60 і не більше 70 відвідувачів;
- б) не менше 60 відвідувачів;
- в) не більше ніж 75 відвідувачів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини складає 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини нитка обірветься на п'ятьох веретенах.

2. Ймовірність проростання насіння пшениці складає 95%. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних зерен не проростуть від 80 до 120 зерен.

Завдання для практичного заняття 9
Модульна контрольна робота №1

Варіант 1

- 1) Скількома способами можна розіслати 5 різних sms п'ятьом різним друзям, якщо кожному відсилати по 1 sms?
- 2) На конкурс для заміщення вакансій у компанію надіслали свої анкети 10 бухгалтерів та 8 менеджерів. Скількома способами можна прийняти на роботу трьох спеціалістів, якщо серед них повинен бути хоча б один бухгалтер і хоча б один менеджер?
- 3) У фізкультурній групі 11 спортсменів, серед яких 6 першорозрядників. Знайти ймовірність того, що серед 5 – ти випадково відібраних спортсменів 3 виявляться першорозрядниками?
- 4) На автоматичній лінії, що складається з 3-х послідовно працюючих верстатів, проходить обробку деталь. Імовірності появи браку для кожного верстата відповідно складають 0,05, 0,06 та 0,07. Знайти ймовірність виготовлення браку:
 - а) одним верстатом;
 - б) хоча б одним верстатом.
- 5) У складальника є 3 конусних і 7 еліптичних валиків. Складальник навмання взяв спочатку один валик, а потім другий. Знайти ймовірність того, що перший з узятих валиків – конусний, а другий – еліптичний.
- 6) Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність помилки для першого економіста дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Під час перевірки у навмання взятому з папки документі виявили помилку. Знайти ймовірність того, що цей документ складав перший економіст.
- 7) Зроблене щеплення від грипу дає позитивний результат у 60% випадків. Знайти ймовірність того, що з п'яти щеплених осіб воно запобігло захворюванню на грип трьом з них.

Варіант 2

- 1) Футбольна команда з 11 гравців обирає на матч капітана і віцекапітана. Скільки існує всього способів здійснити цей вибір?
- 2) Будівельна організація виділила на допомогу підшефному дитячому будинку бригаду з 5-х робітників. В організації працюють всього 20 робітників, у тому числі 5 мулярів, 4 теслярі та 2 штукатури. Скількома способами можна укомплектувати бригаду, щоб вона складалася із робітників усіх спеціальностей по одному?
- 3) Серед 5-ти хлопців та 7-ми дівчат випадковим чином розігруються 4 квитки в театр. Визначити ймовірність того, що серед 4-х “щасливчиків” виявляться 2 дівчини.

- 4) Перевірка партії фасованих макарон по 0,5 кг дала такі результати: 30% усіх пачок мали масу по 498г, 60% - по 500г, 10% - по 502г. З партії навмання взяли дві пачки. Яка ймовірність того, що:
- а) обидві взяті пачки мають однакову масу;
 - б) загальна маса двох взятих пачок відхиляється від норми?
- 5) Господиня після великого прання розвісила на мотузці у дворі 5 дитячих кофтинок і 10 маєчок. Вітром з мотузки почерзі одну за одною скинуло 2 речі. Яка ймовірність того, що спочатку з мотузки впала маєчка, а потім кофтинка?
- 6) До каси підприємства надійшли банкноти у пачках від двох банків: 50 пачок від першого і 70 – від другого. Ймовірність помилки касирів першого банку становить 0,15, другого – 0,2. Яка ймовірність того, що пачку без помилок було сформовано касирами другого банку?
- 7) За даними технологічного контролю в середньому 2% годинників, що виготовляють на заводі, потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додаткового регулювання потребуватимуть 3 годинники.

Варіант 3

- 1) Двосерійний фільм планується знімати у двох містах. Події першої серії будуть розгортатись в одному місті, а події другої серії – у другому. Мерії 7-ми міст дали згоду на зйомки нового фільму. Скільки існує різних варіантів для зйомки цього фільму?
- 2) Із 3-ох інженерів та 5 економістів повинна бути складена комісія у складі 3-х осіб. Скількома способами можна створити таку комісію, якщо в неї повинен входити хоча б один інженер?
- 3) На складі є 15 приладів, причому 10 з них – вітчизняного виробництва, а решта – імпорتنі. Знайти ймовірність того, що серед 5-ти навмання взятих приладів 3 виявляться вітчизняного виробництва.
- 4) Для пожежної сигналізації встановлено 3 незалежно працюючих один від одного датчики. Ймовірності того, що при пожежі спрацюють відповідно кожен з датчиків, відповідно дорівнюють 0,9, 0,95 та 0,97. Знайти ймовірність того, що при пожежі спрацюють:
- а) два датчики;
 - б) хоча б один датчик.
- 5) Студент, який прийшов на екзамен, добре вивчив 90 із 100 питань програми. Знайти ймовірність того, що цей студент знає відповіді на всі 3 питання, задані йому екзаменатором, почерзі один за одним.
- 6) Магазин отримує продукцію від двох виробників: перший постачає $\frac{2}{5}$ усіх виробів, другий – $\frac{3}{5}$. Ймовірність продажу виробів першого виробника становить 0,9, другого – 0,8. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб буде реалізовано від першого виробника?

- 7) Військовий підрозділ проводить обстріл літака з піхотної зброї. Імовірність влучення окремим пострілом при цьому складає 0,001. Знайти ймовірність влучення в ціль чотирма пострілами, якщо зроблено 5000 пострілів.

Варіант 4

- 1) В класі 10 навчальних предметів і 5 різних уроків в день. Скількома способами можна розподілити уроки учням цього класу на один день?
- 2) Фірма "Молочна країна" пропонує 2 види молока різної жирності, 3 види кефіру та 5 видів йогурту. Фірма "Смачне молоко" пропонує 3 види молока, 2 види кефіру та 4 види йогурту. Фірма "Молоко від бабусі" пропонує 2 види молока, 1 вид кефіру та 3 види йогурту. Скількома способами домогосподарка випадково може купити молоко, кефір і йогурт виробництва однієї фірми?
- 3) Серед 10-ти лотерейних білетів є 3 виграшних. Визначити імовірність того, що з узятих навмання 5-ти білетів 2 виявляться виграшними.
- 4) Механізм складається з трьох вузлів. Ймовірність браку при виготовленні першого вузла складає 0,008, другого – 0,012, третього – 0,01. Знайти ймовірність появи браку при виготовленні:
 - а) одного вузла;
 - б) хоча б одного вузла.
- 5) В урні лежать 18 білих і 2 чорні кулі. Навмання одна за одною виймають дві кулі без повернення в урну. Знайти ймовірність того, що обидві вийняті кулі будуть чорного кольору.
- 6) Лікар, оглядаючи хворого, запідозрив у нього два захворювання: пневмонію і бронхіт, причому ймовірність наявності пневмонії лікар оцінив у 40%, а бронхіту – в 60%. Хворому провели додаткове дослідження, яке дає позитивну реакцію при пневмонії у 90% випадків і при бронхіті – у 20%. Це дослідження дало позитивну реакцію на одне з захворювань. Яка ймовірність того, що хворий має пневмонію?
- 7) Фабрика випускає 75 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що з 400 виробів, виготовлених фабрикою, 250 виробів будуть першосортними.

Варіант 5

- 1) Сім спортсменів розігрують 1 золоту, 1 срібну та 1 бронзову медалі. Скількома способами можна розіграти ці нагороди?
- 2) В ювелірну майстерню привезли 6 смарагдів, 7 алмазів та 5 сапфірів. Ювеліру замовили браслет, у якому 3 смарагди, 5 алмазів та 2 сапфіри. Скількома способами він може вибрати каміння на браслет?

- 3) На вітрині магазину представлені 20 коробок цукерок, причому у трьох з них цукерки з горіхами. З вітрини навмання виймають 4 коробки цукерок. Яка ймовірність того, що в одній з вийнятих коробок виявляться цукерки з горіхами?
- 4) Стрілець виконує 3 постріли по рухомій мішені. Ймовірність влучення в ціль при першому пострілі дорівнює 0,1, при другому – 0,3, при третьому – 0,5. Визначити ймовірність:
 - а) одного влучення;
 - б) хоча б одного.
- 5) На тарілці лежать 3 зелених і 4 червоних яблука. З тарілки навмання одне за одним беруть 2 яблука. Знайти ймовірність, що перше взате яблуко – зелене, а друге – червоне.
- 6) Дві перфораторщиці набили на одному перфораторі відповідно 10 і 20 перфокарт. Ймовірність того, що перша перфораторщиця допустила помилку в перфокарті, складає 0,05; для другої перфораторщиці ця ймовірність дорівнює 0,1. При перевірці перфокарт була виявлена помилка. Знайти ймовірність того, що помилилася друга перфораторщиця.
- 7) Записи страхової компанії показали, що 30% власників договорів страхування подали запити на відшкодування. Для перевірки було відібрано 15 людей, які мають договори страхування. Знайти ймовірність того, що протягом року від них надійде п'ять запитів на відшкодування.

Варіант 6

- 1) Якою кількістю способів можна розсадити 8-х студентів у ряд з 8-ми місць?
- 2) На виховну годину учні запросили ветерана війни. Після виступу вирішили подарувати букет із 5 квіток. Скількома способами можна вибрати квіти з вази, де 5 жовтих і 10 червоних гвоздик, щоб у букеті було не більше двох жовтих гвоздик?
- 3) Із 15 рейсів, що виконуються з аеропорту протягом доби, 60 % рейсів виконуються власним парком літаків. Знайти ймовірність того, що з вибраних навмання 5-ти рейсів рівно 3 виконуються власним парком літаків.
- 4) Фірма має можливість отримати два контракти. Ймовірність отримання першого контракту складає 0,9, а другого – 0,8. Вважаючи ці події незалежними, знайти ймовірності наступних подій:
 - а) фірма отримає обидва контракти;
 - б) фірма отримає принаймні один контракт.
- 5) На складі серед 50 електроламп є 3 нестандартні. Зі складу навмання одну за одною беруть 2 електролампи. Знайти ймовірність того, що обидві з них виявляться нестандартними.

- 6) Деталі, які виготовляє завод, можуть бути перевірені щодо відповідності стандартам, одним із двох контролерів. Ймовірність того, що деталь буде перевірена першим контролером, становить 0,6, другим контролером – 0,4. Ймовірність того, що деталь буде визнана стандартною першим контролером – 0,94, другим контролером – 0,98. Після перевірки деталь визнана стандартною. Знайти ймовірність того, її перевірів перший контролер.
- 7) Для успішного тестування з математики студент має дати 3 правильні відповіді на 5 запитань тесту. Ймовірність того, що він правильно відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе тест з математики.

Варіант 7

- 1) Скільки існує варіантів туристичного маршруту, якщо для екскурсії з 10-ти різних музеїв обирають 3 музеї?
- 2) Оля в своїй кишені має 10 червоних та 5 синіх гудзиків. Скількома способами вона може навмання вибрати з кишені 3 гудзики, щоб серед них були принаймні 2 синіх гудзики?
- 3) З 10 літаків, що прибувають в аеропорт протягом доби, 80 % мають повне комерційне завантаження. Знайти ймовірність того, що серед п'яти випадковим способом відібраних літаків тільки 4 мають повне завантаження.
- 4) Три станки – автомати обслуговує один робітник. Ймовірність того, що в деякий момент часу вимагає уваги робітника перший станок, дорівнює 0,3, другий – 0,2, третій – 0,1. Визначити ймовірність того, що в деякий момент часу вимагатиме уваги робітника:
- а) один станок;
 - б) хоча б один станок.
- 5) Із колоди карт (36 штук) навмання витягають одну за одною без повернення дві карти. Знайти ймовірність того, що буде витягнута спочатку шістка, а потім дама.
- 6) Два автомати виробляють однакові деталі, які поступають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша продуктивності другого. Перший автомат виробляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь вироблена першим автоматом.
- 7) Телевізійний завод відвантажив на базу 5000 справних кольорових телевізорів. Ймовірність того, що під час транспортування їх може бути пошкоджено, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу потраплять три пошкоджені телевізори.

Варіант 8

- 1) На святкуванні дня народження присутні 12 дітей. Клоун має намір вибрати 3-х дітей для участі в конкурсі і вручити кожному з них одну кульку. Скількома способами він може обрати дітей, якщо в руках у нього жовта, синя і зелена кульки?
- 2) З групи, яка складається з 7-ми чоловіків та 4-х жінок необхідно делегувати 6-х людей для роботи на виборчій дільниці. Скількома способами це можна зробити щоб серед них було не менше 2-х жінок?
- 3) В авіакасі було 15 квитків, серед яких 6 квитків до пункту А. До кінця зміни продали 8 квитків. Знайти ймовірність того, що 3 з них до пункту А.
- 4) Ймовірність влучення в ціль першої гармати дорівнює 0,7, другої – 0,9, третьої – 0,75. Знайти ймовірність того, що при одному залпі з трьох гармат у мішень влучать:
 - а) дві гармати;
 - б) хоча б одна гармата.
- 5) На полиці стоять 10 книжок, серед яких 3 у м'якій обкладинці. З полиці навмання одну за одною беруть 2 книжки. Знайти ймовірність того, що обидві з них виявляться у м'якій обкладинці.
- 6) В першому ящику лежать 8 білих і 6 чорних куль, а в другому – 10 білих і 4 чорних. Навмання вибирають і ящик і кулю. Відомо, що вийнята куля чорна. Знайти ймовірність того, що її вилучено з першого ящика.
- 7) Зі статистичних даних відомо, що ймовірність захворіти грипом для більшості людей складає 0,1. Яка ймовірність того, що із 100 перевірених осіб хворими виявляться від 20 до 50 осіб?

Варіант 9

- 1) Ще з осені садівник підготував 5 посадкових ям для весняної посадки в них саджанців фруктових дерев. Навесні він придбав 3 саджанці яблунь різних сортів. Скільки існує варіантів посадки цих саджанців у підготовлені ями?
- 2) Із 10-ти троянд і 8-ми жоржин необхідно скласти святковий букет, щоб у ньому було не менше 8-ми троянд і 7-ми жоржин. Скількома способами це можна зробити?
- 3) У ящику лежать 12 деталей, серед яких 9 стандартних, а інші – браковані. Навмання з ящика вийняли 4 деталі. Знайти ймовірність того, що 3 з них – стандартні.
- 4) Ймовірність того, що перший футболіст влучить у ворота дорівнює 0,7, а другий – 0,8. Знайти ймовірність того, що коли кожен з футболістів зробить по одному удару, то:
 - а) один влучить;
 - б) хоча б один влучить.

- 5) На чотирьох картках написані літери “е”, “ж”, “а”, “м”. Навмання одну за одною беруть картки і викладають у ряд. Знайти ймовірність того, що отримають слово “межа”.
- 6) Електронний прилад містить дві мікросхеми. Ймовірність виходу з ладу протягом одного року для першої мікросхеми дорівнює 0,2, а для другої – 0,1. Відомо, що протягом року з ладу вийшла одна мікросхема. Яка ймовірність того, що це перша мікросхема?
- 7) Ймовірність того, що інвестиційний проект принесе через рік прибуток, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 15 інвестиційних проектів прибутковими виявляться 10 проектів.

Варіант 10

- 1) У кафе є 15 різних видів морозива. Скільки всього існує способів замовлення десерту з трьох різних видів морозива?
- 2) Екскурсійна група з 15 осіб підійшла до печери. У печеру заходять лише групами з 5 осіб. Скількома способами ця екскурсійна група може відвідати печеру?
- 3) З десяти працівників, серед яких 7 вищого розряду, сформовано бригаду. Знайти ймовірність того, що серед 6-ти вибраних працівників цієї бригади, 4 працівники будуть вищого розряду.
- 4) Робітник обслуговує два ткацьких верстати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години верстат не потребуватиме втручання робітника, для першого дорівнює 0,9, для другого – 0,7. Знайти ймовірність того, що протягом першої ж робочої години:
 - а) тільки один станок потребуватиме втручання робітника;
 - б) хоча б один станок потребуватиме втручання робітника.
- 5) На складі знаходяться 20 мішків борошна, серед яких 12 мішків борошна вищого гатунку, а решта – мішки борошна першого сорту. Зі складу навмання один за одним беруть 2 мішки борошна. Знайти ймовірність того, що перший мішок міститиме борошно вищого сорту, а другий – борошно першого сорту.
- 6) На трьох заводах виготовляють діодні лампочки до фар автомобілів. Перший завод виготовляє 70%, другий 12%, третій 18% всієї продукції. Частка браку відповідно 4%, 1%, 2%. Випадково вибрана лампочка бракована. Яка ймовірність того, що її виготовлено третім заводом?
- 7) Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують 5 абонентів.

Варіант 11

- 1) Скількома способами можна дістати навмання 3 кулі з урни, в якій лежать 9 куль різного кольору?
- 2) Автопарк підприємства складається з 7-ми легкових автомобілів, 6-ти - вантажних та 4-х автобусів. Скількома способами для проходження ТО можна відібрати 5 легкових автомобілів, 3 – вантажних і 2 автобуси підприємства?
- 3) У групі 8 студентів чоловічої статі та 4 жіночої. Декан викликав до себе 3-х студентів цієї групи. Знайти ймовірність того, що серед них буде одна студентка і 2 студенти.
- 4) Три вантажних автомобілі, що доставляють вантажі до трьох споживачів, потрапили на вантажно-розвантажувальні пункти (ВРП). Ймовірність того, що автомобілям буде необхідно очікувати розвантаження у черзі, складає 0,7; 0,8 і 0,9 для першого, другого і третього ВРП, відповідно. Знайти ймовірності наступних подій:
 - а) тільки один з трьох автомобілів буде очікувати розвантаження у черзі.
 - б) жоден з трьох автомобілів не буде очікувати розвантаження у черзі.
- 5) Комплект із 20 виробів містить 40 % нестандартних виробів. З комплекту навмання один за одним беруть 2 вироби. Знайти ймовірність того, що перший з них нестандартний, а другий – стандартний.
- 6) Зібрана геодезична інформація з певної території. Перший геодезист дає 30% усіх відомостей, другий – 45%, третій – те, що залишилося. Помилкові результати першого геодезиста складають 1%, другого – 3%, третього – 5%. Перевірено якість вимірів одного об'єкту – виміри виявилися помилковими. Визначити імовірність того, що ці виміри робив третій геодезист.
- 7) Знайти ймовірність того, що герб випаде не менш ніж 48 разів, і не більш ніж 52 рази, якщо монету підкидають 100 разів.

Варіант 12

- 1) Скількома способами можна розподілити 8 провідників у 8 вагонів електропоїзда, якщо з кожним вагоном закріплювати одного провідника?
- 2) На одній полиці стоять 5 підручників з математики, 3 – з інформатики та 2 з фізики. Скількома способами з полиці навмання можна взяти 2 підручники з однієї і тієї самої навчальної дисципліни?
- 3) На підприємстві працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами з них навмання відбирають 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед відібраних осіб буде 3 жінки.
- 4) У цеху є три резервні генератори, що працюють незалежно один від одного. Для кожного з них імовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено:
 - а) два генератори з трьох;
 - б) принаймні один генератор.

- 5) У відділі технічного контролю швейної фабрики представлені на огляд 80 костюмів, з яких 50 костюмів одного фасону, а 30 - іншого. Навмання один за одним для огляду беруть 2 костюми. Знайти ймовірність того, що перший костюм буде одного сорту, а другий – другого.
- 6) Мандрівник може купити квиток в одній з трьох кас залізничного вокзалу. Ймовірність того, що він попрямує до першої каси складає $\frac{1}{2}$, до другої – $\frac{1}{3}$, до третьої – $\frac{1}{6}$. Ймовірності того, що в касах уже немає квитків, рівні відповідно $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{8}$. Мандрівник звернувся в одну з кас і таки купив квиток. Знайти ймовірність того, що квиток був куплений в першій касі.
- 7) Під час виробництва цементу у 0,3% готової продукції спостерігається пошкодження упаковки. Яка ймовірність того, що в партії з 1000 мішків цементу пошкодженими виявляться чотири мішки?

Варіант 13

- 1) Директор автосалону має 15 різних моделей автомобілів. Для демонстрації на виставці він може обрати лише 3 з них. Скількома способами це можна зробити?
- 2) Шахматний клуб відвідують 5 хлопців та 3 дівчини. Для зустрічі з grosмейстером клуб отримав 3 запрошення. Скількома способами ці запрошення можна так розподілити, щоб на зустріч пішла хоча б одна дівчина?
- 3) У коробці лежать 4 червоних і 6 зелених олівців. Із коробки випало 3 олівці. Знайти ймовірність того, що 2 з них червоні.
- 4) Радіостанція аеропорту надсилає 3 повідомлення борту літака. Імовірність підслуховування розвідувальним агентством першого повідомлення дорівнює 0,6; другого – 0,65; третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що розвідувальне агентство підслухало:
 - а) два повідомлення;
 - б) принаймні одне повідомлення.
- 5) На тарілці лежать 2 апельсини та 7 мандаринів. З тарілки навмання один за одним беруть 2 фрукти. Знайти ймовірність того, що першим візьмуть мандарин, а другим – апельсин.
- 6) Для участі у спортивних змаганнях з першої групи було вибрано 4 студенти, з другої – 6 студентів і з третьої - 5 студентів. Імовірності того, що студент потрапляє у збірну інституту складають 0,5; 0,4 і 0,3 відповідно для кожної з груп. Навмання обраний учасник спортивних змагань потрапив до збірної. Яка ймовірність того, що це був студент з другої групи?
- 7) В інкубатор закладено 750 яєць. Ймовірність того, що з яйця вилупиться курочка складає 0,5. Яка ймовірність того, що з закладених у інкубатор яєць вилупляться 428 курок?

Варіант 14

- 1) Розклад одного дня навчання складається з 5 уроків. Визначити кількість можливих варіантів розкладу при виборі з 11 навчальних предметів.
- 2) Скількома способами можна скласти команду з п'яти учасників шахового гуртка I-го курсу, шести учасників II-го курсу і чотирьох учасників III-го курсу таким чином, щоб до її складу з I-го курсу входило три студенти, а з II-го і III-го курсів – по два студенти?
- 3) У класі 25 учнів, з яких 10 цікавляться математикою, а інші – літературою. Знайти ймовірність того, що 2 навмання вибраних учні класу цікавитимуться однією дисципліною.
- 4) Ймовірність того, що біатлоніст схибить на першому рубежі дорівнює 0,15; схибить на другому – 0,1; схибить на третьому – 0,3. Знайти ймовірність того, що біатлоніст схибить:
 - а) на усіх трьох рубежах;
 - б) принаймні на одному рубежі.
- 5) В ящику лежать 5 морквин та 7 картоплин. З ящика навмання один за одним беруть 2 овочі. Знайти ймовірність того, що і першою і другою візьмуть картоплину.
- 6) На полігоні є 10 гвинтівок, з яких 4 мають оптичний приціл. Ймовірність того, що стрілок влучить у мішень із гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; із гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок влучив у мішень із навмання взятої гвинтівки. Знайти ймовірність того, що він стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом.
- 7) Автобіографію відомого діяча вирішили видати тиражем в 1000 екземплярів. При видавництві ймовірність автобіографії бути неправильно зброшурованою складає 0,002. Знайти ймовірність того, що вказаний тираж міститиме 7 бракованих автобіографій.

Варіант 15

- 1) 10 учнів обмінялися фотокартками. Скільки всього було роздано фотокарток?
- 2) У вазі стоїть букет, складений з 8-ми троянд, 6-ти гвоздик і 3-х ромашок. Скількома способами з цього букету навмання можна дістати 2 квітки одного сорту?
- 3) В ящику лежать 6 білих і 4 чорних кулі. З ящика виймають навмання 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони однокольорові.
- 4) Для трьох роздрібних торговельних підприємств визначено плановий рівень прибутку. Ймовірність того, що перше підприємство виконає план прибутку складає 90%, для другого вона становить 95%, для третього 100%. Знайти ймовірність того, що плановий рівень прибутку буде досягнутий:
 - а) усіма підприємствами;
 - б) принаймні одним підприємством.

- 5) Біля відділення пошти для отримання пенсії стоять у черзі 15 людей: 9 жінок і 6 чоловіків. Працівник пошти дозволяє заходити у відділення один за одним згідно черги по одній людині. Через деякий час у відділенні пошти опинилися 3 людини. Знайти ймовірність того, що першою і другою увійшли до відділення пошти жінки, а третім – чоловік.
- 6) Комп'ютери однієї марки виробляють 2 підприємства, причому перше підприємство випускає в три рази більше комп'ютерів, ніж друге. На першому підприємстві серед вироблених комп'ютерів зафіксовано 1% браку, а на другому – 2%. Навмання куплений комп'ютер виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він вироблений першим підприємством?
- 7) Імовірність того, що інвестиційний проект принесе через рік прибуток, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 15 інвестиційних проектів прибутковими виявляться 10 проектів.

Варіант 16

- 1) Скількома способами можуть зайняти перше, друге і третє місце 8 учасників фінального забігу на дистанцію 100м?
- 2) В магазині продаються 3 червоні, 5 зелених і 4 сині шапки, а також 7 червоних, 2 зелених і 5 синіх шарфи. Скількома способами Маша може обрати собі шапку і шарф одного кольору?
- 3) Поліція зупинила групу іноземних туристів, до якої входили 5 іспанців та 4 французи. У трьох із них, навімання обраних, перевірили документи. Знайти ймовірність того, що поліція перевірила документи у 2-х іспанців та одного француза цієї іноземної групи туристів.
- 4) Для кожної з трьох виробничих ділянок ймовірності невиконання плану відповідно рівні: 0,3; 0,1 та 0,2. Знайти ймовірність того, що до моменту підбиття підсумків роботи планове завдання буде виконано:
 - а) двома ділянками;
 - б) принаймні однією ділянкою.
- 5) У ящику 7 білих і 5 чорних куль, які відрізняються лише кольором. Випадковим чином виймають 1 кулю і не опускаючи її назад, виймають ще одну. Знайти ймовірність того, якщо при першому вилученні дістали білу кулю, а другою вийнято чорну кулю.
- 6) Василь, Тарас і Андрій працюють у банку. За день Василь обслуговує 12 клієнтів, Тарас – 25, Андрій – 10. Ймовірність того, що при розмові з Василем клієнт захоче користуватися послугами банку становить 0,7, з Тарасом – 0,6 і з Андрієм – 0,8. Навмання вибраний клієнт скористувався послугами банку. Визначити ймовірність того, що цю послугу оформив Василь.
- 7) Нехай ймовірність виробництва бракованого виробу дорівнює 0,008. Знайти ймовірність того, що серед 1000 таких виробів буде 5 бракованих.

Варіант 17

- 1) На станції 7 запасних колій. Скількома способами можна розмістити на них 4 потяги?
- 2) Скількома способами можна призначити варту з 12-ти солдат, 2-х сержантів та 1-го офіцера, якщо в підрозділі всього 14 солдат, 3 сержанти і 4 офіцери?
- 3) У коробці лежать 10 електричних лампочок, з яких 6 штук потужністю 90 Вт та 4 штуки потужністю 60 Вт. Навмання з коробки взяли 3 лампочки. Знайти ймовірність того, що дві з них мають потужність 90 Вт та одна – потужність 60 Вт.
- 4) На садовій ділянці посаджені 3 дерева: вишня, слива та яблуня. Ймовірність того, що приживеться вишня складає 0,7; для сливи і яблуні ймовірності прижитися відповідно рівні 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність того, що приживеться:
 - а) принаймні одне дерево;
 - б) вишня, слива та яблуня.
- 5) На столі у викладача лежать три дипломні роботи магістрів і дві дипломні роботи спеціалістів. Викладач навмання бере зі столу почерзі одну за одною дві дипломні роботи. Знайти ймовірність того, що першою він узяв дипломну роботу магістра, а другою – роботу спеціаліста.
- 6) У студентській групі 70% юнаків та 30% дівчат. При цьому 40% юнаків і 20% дівчат мають смартфони. Після занять в аудиторії був знайдений кимось забутий смартфон. Яка ймовірність того, що він належав юнакові?
- 7) Завод відправив на базу 5000 доброякісних виробів. Ймовірність пошкодження виробів у процесі їх транспортування, складає 0,0002. Визначити ймовірність того, що на базу доставлять три неякісні вироби.

Варіант 18

- 1) Скількома способами можна виготовити 3-х кольоровий прапор, якщо в наявності є тканини 7-ми різних кольорів?
- 2) З трьох математиків та пяти філологів необхідно скласти комісію в складі чотирьох людей, в яку б входив хоча б один математик. Скількома способами це можна зробити?
- 3) У ящику лежать 10 м'ячів однакових розмірів: 6 червоні та 4 сині. Навмання з ящика взяли 3 м'ячі. Знайти ймовірність того, що всі вони одного кольору.
- 4) Екзаменаційний білет містить 3 питання. Ймовірності того, що студент відповість на перше і друге питання однакові і дорівнюють 0,9, а на третє питання – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент відповість:
 - а) на всі три питання з білету;
 - б) принаймні на одне питання.

- 5) На Новій пошті відправлення чекають 8 посилок: 5 – по місту, а 3 – по країні. Працівник пошти почерзі одну за одною бере 2 посилки. Знайти ймовірність того, що першою він узяв посилку, яка потребує відправлення по місту, а другою – посилку з відправкою по країні.
- 6) Для набору тексту підручника з “Математики” залучили трьох осіб. Перша особа набрала 40 сторінок, друга – 60, а третя – 100 сторінок тексту. Весь текст помістили в одну папку. Навмання вийнята з папки сторінка тексту виявилася набраною з помилкою. Яка ймовірність того, що вона набрана другою особою, якщо ймовірність зробити помилку для першої з цих осіб дорівнює 0,05, другої – 0,1, а третьої – 0,15?
- 7) На одному факультеті навчаються 730 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно трьох студентів цього факультету?

Варіант 19

- 1) Згідно з проектом зал готелю мають прикрашати 2 різні пальми – одна біля вікна, а друга – у центрі. Дизайнер запропонував 3 різні види пальм. Скільки існує варіантів оформлення залу готелю пальмами?
- 2) В урні лежать 7 синіх та 5 червоних куль. Скількома способами навмання можна вийняти з цієї урни 2 кулі одного кольору?
- 3) Серед 10 електроламп є три нестандартні. Знайти ймовірність того, що серед трьох взятих навмання одночасно електроламп 2 виявляться стандартними і 1 нестандартною.
- 4) З партії виробів товаровзнавець навмання відбирає вироби вищого гатунку. Ймовірність того, що вибраний виріб буде вищого гатунку складає 0,8; першого гатунку – 0,7; другого гатунку – 0,5. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання відібраних виробів будуть:
 - а) лише 2 вищого гатунку;
 - б) всі різних гатунків.
- 5) У читальному залі є 6 підручників з теорії ймовірностей, з яких 4 мають тверду обкладинку. Бібліотекар навмання почерзі один за одним бере 2 з цих підручників. Знайти ймовірність того, що і перший, і другий з них будуть мати тверду обкладинку.
- 6) Три цехи виготовляють телевізори. Від першого цеху надходить 50% всіх телевізорів, від другого – 20%, від третього – 30%. Перший цех допускає 4% браку, другий 1%, третій 3%. Купили телевізор, а він не працює. З якого цеху він найімовірніше за все надійшов?
- 7) Ймовірність того, що витрати електроенергії протягом доби не перевищили норму, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрати електроенергії впродовж 2-ох днів не перевищать норму.

Варіант 20

- 1) У поштовому відділенні продаються вітальні листівки 10 різних видів. Скількома способами можна придбати 2 різні вітальні листівки?
- 2) У коробці лежать 3 олівці і 4 фломастери. Скількома способами навмання з коробки можна дістати 2 предмети для малювання, якщо серед них має бути принаймні один олівець?
- 3) У ящику в довільному порядку розкладено 20 деталей, причому 5 з них стандартні. Навмання з ящика беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей буде одна стандартна.
- 4) Шахматисту в турнірі потрібно зіграти з двома суперниками, ймовірності виграшу у яких рівні 0,6 та 0,8 відповідно. Знайти ймовірність того, що він виграв:
 - а) лише в одного суперника;
 - б) принаймні в одного.
- 5) Андрію подарували 7 шоколадних яєць однакових розмірів: 3 з іграшкою всередині та 4 – без іграшки. Андрій навмання один за одним взяв і з'їв 2 з цих шоколадних яєць. Знайти ймовірність того, що перше, взяте ним яйце буде з іграшкою всередині, а друге – без іграшки.
- 6) Клієнти оцінюють попередній дизайн продукції. В минулому позитивні відгуки від клієнтів отримали 95% високопопулярних продуктів, 60% середньопопулярних та 10% низькопопулярних продуктів. Крім того, 40% продукції виявилась високопопулярною, 35% була середньопопулярною і 25% мала низьку популярність. Якщо новий дизайн отримав позитивний відгук, то яка ймовірність того, що це буде високопопулярний продукт?
- 7) Митниця дає офіційну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларують весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 6 осіб, які повертаються з-за кордону, то яка ймовірність того, що 4 з них не задекларують товар, який обкладається податком?

Модуль 2. ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Третій змістовий модуль (ЗМЗ): ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Лекція 5. Поняття випадкової величини та законів розподілу її ймовірностей

5.1. Види випадкових величин та способи їх задання

У теорії ймовірностей, поряд з поняттям випадкова подія і ймовірність, одним з основних є поняття випадкової величини. Наприклад, час безвідмовної роботи деякого приладу, кількість випадань герба за багаторазового підкидання монети тощо.

Випадковою величиною називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути лише одного числового значення, яке зумовлене результатом експерименту.

Отже, **випадковою величиною**, пов'язаною з певним випробуванням, називають величину X , яка під час випробування може набувати одного і лише одного можливого числового значення, яке наперед невідоме і не залежить від випадкових причин, що попередньо не можуть бути враховані.

Між випадковими подіями і випадковими величинами є тісний зв'язок. Випадкова подія – це якісна характеристика випадкового результату випробування, а випадкова величина – його кількісна характеристика.

Випадкові величини поділяють на два типи: **дискретні** та **неперервні**.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути відокремлених, ізольованих одне від одного, числових значень з відповідними ймовірностями.

Іншими словами, вона має таку властивість, що кожне з її можливих значень має околість, який вже не містить жодного з інших значень цієї самої величини. Всі можливі значення дискретної випадкової величини можуть бути пронумеровані: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може набувати будь-якого числового значення з певного обмеженого інтервалу (a, b) або необмеженого інтервалу $(-\infty, +\infty)$. Наприклад, випадкова величина X – час безвідмовної роботи приладу, неперервна, оскільки її можливе значення $t > 0$.

Співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими приймають ці значення, називають **законом розподілу ймовірностей випадкової величини**.

5.2. Загальні закони розподілу дискретних випадкових величин

Загальними законами розподілу ДВВ є:

1. **Ряд розподілу** ДВВ X – таблиця, в якій перераховані всі можливі значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ випадкової величини (у верхньому рядку в порядку зростання) і відповідні їм ймовірності $p_1, p_2, \dots, p_n$ (у нижньому рядку):

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

.

В таблиці $p_i = P(X = x_i)$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

2. Графічне зображення ряду розподілу – **многокутник (полігон) розподілу** (по осі абсцис відкладають можливі значення x_n випадкової величини X , а по осі ординат – ймовірності p_n цих значень; точки (x_n, p_n) послідовно з'єднують відрізками прямих).

3. **Функція розподілу (інтегральний закон розподілу)** випадкової величини X – функція $F(x)$, що дорівнює ймовірності $P(X < x)$ того, що випадкова величина X буде менше довільно вибраного значення x .

Функція розподілу $F(x)$ для ДВВ X обчислюється за формулою:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i. \quad (5.2.1)$$

Властивості функції розподілу випадкової величини:

1. Функція розподілу $F(x)$ є невід'ємною функцією в межах від нуля до одиниці: $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. При зростанні x від $-\infty$ до $+\infty$ функція розподілу $F(x)$ змінюється від нуля до одиниці: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
3. Функція розподілу $F(x)$ не спадна: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;
4. Функція розподілу $F(x)$ неперервна зліва: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;
5. Ймовірність попадання випадкової величини X до проміжку $[a, b)$, дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (5.2.2)$$

Приклад 5.2.1.

Незалежно один від одного працюють три елементи. Перший протягом доби працює безвідмовно з ймовірністю 0,8, другий – 0,6, третій – 0,3. Випадкова величина X дорівнює числу безвідмовних елементів. Скласти ряд розподілу та знайти функцію розподілу випадкової величини X .

Розв'язання.

Випадкова величина X може набувати можливих значень:

- 0 (жодного безвідмовного елемента);
- 1 (один безвідмовний елемент);
- 2 (два безвідмовних елементи);
- 3 (три безвідмовних елементи).

Позначимо через h_1, h_2, h_3 ймовірності безвідмовної роботи першого, другого і третього елементів. Тоді за умовою задачі $h_1 = 0,8, h_2 = 0,6, h_3 = 0,3$, а ймовірності виходу з ладу цих елементів відповідно дорівнюють $\bar{h}_1 = 0,2, \bar{h}_2 = 0,4, \bar{h}_3 = 0,7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей обчислимо ймовірності, з якими випадкова величина X набуває можливих значень:

$$p_0 = P\{X = 0\} = \bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3 = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,056;$$

$$p_1 = P\{X = 1\} = h_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3 + \bar{h}_1 h_2 \bar{h}_3 + \bar{h}_1 \bar{h}_2 h_3 = \\ = 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,332$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = h_1 h_2 \bar{h}_3 + h_1 \bar{h}_2 h_3 + \bar{h}_1 h_2 h_3 = \\ = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,468$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = h_1 h_2 h_3 = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,144.$$

Для перевірки обчислень варто переконатися, що $\sum_{i=0}^3 p_i = 1$:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,056 + 0,332 + 0,468 + 0,144 = 1.$$

Отже, ряд розподілу величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
p	0,056	0,332	0,468	0,144

Оскільки, функція розподілу $F(x)$ для ДВВ X визначається рівністю:
 $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$, тоді

якщо $x \leq 0$, то $F(x) = P(X < 0) = \sum_{x_i < 0} p_i = 0$;

якщо $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(X < 1) = \sum_{x_i < 1} p_i = P(X = 0) = 0,056$;

якщо $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(X < 2) = \sum_{x_i < 2} p_i = P(X = 0) + P(X = 1) =$
 $= 0,056 + 0,332 = 0,388$;

якщо $2 < x \leq 3$, то

$$F(x) = P(X < 3) = \sum_{x_i < 3} p_i = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= 0,056 + 0,332 + 0,468 = 0,856$$
;

якщо $x > 3$, то

$$F(x) = P(X < +\infty) = \sum_{x_i < \infty} p_i = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= 0,056 + 0,332 + 0,468 + 0,144 = 1.$$

Таким чином, шукана функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,056, & 0 < x \leq 1, \\ 0,388, & 1 < x \leq 2, \\ 0,856, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

5.3. Функція та щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Закон розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин може бути заданий *функцією розподілу* та *щільністю розподілу*.

Нагадаємо, що *функцією розподілу (інтегральним законом розподілу)* випадкової величини X називають функцію $F(x)$, яка визначає ймовірність, того що випадкова величина X в результаті випробування набуде значення, менше x , тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометричний зміст цієї рівності полягає в тому, що $F(x)$ – це ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке зображається на числовій осі точкою, розміщеною лівіше точки x .

Щільністю розподілу ймовірностей (диференціальним законом розподілу) $f(x)$ неперервної випадкової величини X називають першу похідну від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \quad (5.3.1)$$

З даного означення випливає, що функція розподілу ймовірностей є первісною для щільності розподілу:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \quad (5.3.2)$$

Властивості щільності розподілу:

1. Щільність розподілу ймовірностей є невід'ємною функцією: $f(x) \geq 0$.
2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
3. Графік функції $f(x)$ називають **кривою розподілу**.

Теорема: Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення з інтервалу (a,b) , дорівнює визначеному інтегралу від щільності розподілу в межах від a до b : $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Приклад 5.3.1.

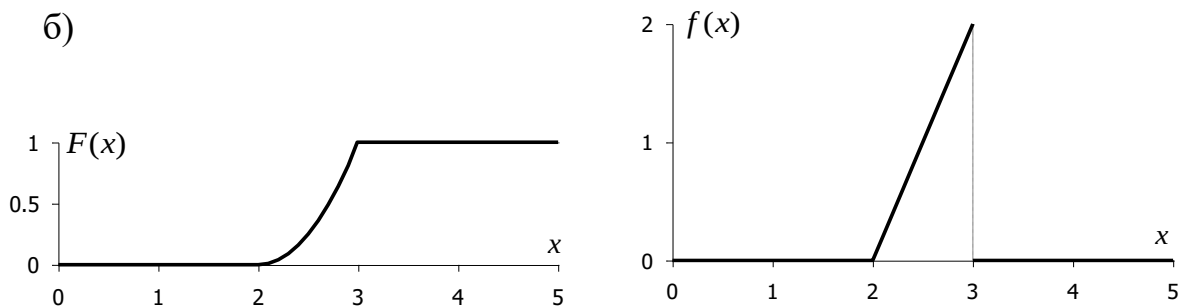
Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

- а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;
- б) побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$;
- в) визначити двома способами (за функціями $f(x)$ і $F(x)$) ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(2,2; 2,8)$.

Розв'язання.

а) Оскільки $f(x) = F'(x)$, то маємо: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2(x-2), & 2 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$



в) І спосіб (за функцією розподілу): $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

$$P(2,2 < X < 2,8) = F(2,8) - F(2,2) = (2,8 - 2)^2 - (2,2 - 2)^2 = 0,6.$$

II спосіб (за щільністю ймовірності): $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

$$\begin{aligned} P(2,2 < X < 2,8) &= \int_{2,2}^{2,8} 2(x-2)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{2,2}^{2,8} = \\ &= (2,8^2 - 4 \cdot 2,8) - (2,2^2 - 4 \cdot 2,2) = 0,6 \end{aligned}$$

Приклад 5.3.2.

Випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2, \\ \frac{1}{2} \cos x, & -\pi/2 < x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X .

Розв'язання.

$F(x)$ знаходимо за формулою (5.3.2).

Нехай $x \leq -\frac{\pi}{2}$, тоді $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.

Нехай $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, тоді $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt =$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dt + \int_{-\pi/2}^x \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t \Bigg|_{-\pi/2}^x = \frac{1}{2} (\sin x - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} (\sin x + 1).$$

Нехай $x > \frac{\pi}{2}$, тоді $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt =$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^x 0dt = \frac{1}{2} \sin t \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) = 1.$$

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2, \\ \frac{1}{2} (\sin x + 1), & -\pi/2 < x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$

Завдання для практичного заняття 10
Закони розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

1. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини X :

X	-1	1	3	5	7
p_i	0,15	0,2	0,1	0,3	p_5

Обчислити ймовірність p_5 . Записати функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X . Визначити (за рядом розподілу і за функцією розподілу) ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень з інтервалу $(3;4)$.

2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	2	4	5
p	0,3	0,1	0,4	0,2

Побудувати багатокутник розподілу.

3. Задано ряд розподілу випадкової величини X :

x_i	-4	-1	2	5	8	10
p_i	a	$1,5a$	$0,5a$	$3,5a$	$2,5a$	a

Знайти значення a .

4. Через станцію проходять два потяги. Ймовірність затримки першого потяга дорівнює 0,05, другого – 0,1. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості затриманих потягів. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

5. Антена отримує три незалежних сигнали. Ймовірність затримки першого сигналу дорівнює 0,3, другого – 0,4, третього – 0,8. Випадкова величина X – число сигналів без запізнення. Побудувати ряд розподілу. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

6. За функцією розподілу дискретної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10, \\ 0,3, & 10 < x \leq 11, \\ 0,4, & 11 < x \leq 12, \\ 0,6, & 12 < x \leq 15, \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$

побудувати її ряд розподілу.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Троє студентів складають іспит із теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа студентів, які складуть іспит.

2. За функцією розподілу дискретної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,3, & 0 < x \leq 1, \\ 0,9, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

побудувати її ряд та багатокутник розподілу.

Завдання для практичного заняття 11

Закони розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

1. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(0; 1/3)$.

2. Неперервну випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти: а) коефіцієнт A ,

б) функцію розподілу $F(x)$,

в) ймовірність попадання величини X в проміжок $(0, \pi / 2)$.

3. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 1, & \text{при } x > e; \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірності $f(x)$.

4. Випадкову величину X задано щільністю ймовірності $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

5. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ A(x+1)^2, & -1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , та побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$.

6. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , $F(x)$ та ймовірність того, що задана випадкова величина потрапить в інтервал $(-0,25; 0,5)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Задана функція розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , та побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$.

2. Випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ -\frac{1}{2}(x-1), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

Знайти функцію $F(x)$ розподілу випадкової величини X .

Лекція 6. Числові характеристики випадкових величин

6.1. Математичне сподівання

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X , яка задана рядом розподілу:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

називають суму добутків всіх можливих значень випадкової величини на їх ймовірності, тобто:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n,$$

або

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (6.1.1)$$

за умови, що ряд в правій частині абсолютно збіжний.

Математичне сподівання є центром розсіювання випадкової величини і воно відповідає середньому значенню випадкової величини. Вимірюється в тих самих одиницях, що й сама випадкова величина X .

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X , яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називають невластний інтеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (6.1.2)$$

за умови, що він абсолютно збіжний.

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать проміжку $[a, b]$, то

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (6.1.3)$$

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C.$$

2. Сталій множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XYZ) = M(X)M(Y)M(Z).$$

4. Математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X + Y + Z) = M(X) + M(Y) + M(Z).$$

Відхиленням називають різницю між випадковою величиною і її математичним сподіванням:

$$X - M(X).$$

Математичне сподівання відхилення дорівнює нулю:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

6.2. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Дисперсією (розсіюванням) випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]. \quad (6.2.1)$$

При обчисленні дисперсії зручно використовувати теорему:

Теорема. Дисперсія дорівнює різниці математичного сподівання квадрата випадкової величини X та квадрата її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (6.2.2)$$

Одиниця вимірювання дисперсії $D(X)$ дорівнює квадрату одиниці вимірювання випадкової величини X .

Властивості дисперсії:

1. Дисперсія випадкової величини завжди невід'ємна: $D(X) \geq 0$.
2. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(C) = 0$.
3. Квадрат сталого множника можна винести за знак дисперсії:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. Дисперсія суми або різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Для оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення, крім дисперсії, використовують середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X)$ випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (6.2.3)$$

Середнє квадратичне відхилення має ту ж розмірність, що й сама випадкова величина X .

Отже, зміст середнього квадратичного відхилення такий же, як у дисперсії, а розмірність – як у випадкової величини.

Приклад 6.2.1.

Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	1	2	3
p_i	0,4	0,5	0,1

Обчислити її числові характеристики.

Розв'язання.

Обчислюємо математичне сподівання $M(X)$ за формулою (6.1.1):

$$M(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,1 = 1,7.$$

Дисперсію $D(X)$ знайдемо за формулою (6.2.2).

Для цього початку обчислимо математичне сподівання квадрата випадкової величини:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,1 = 3,3.$$

Тоді згідно формули (6.2.2) маємо:

$$D(X) = 3,3 - 1,7^2 = 0,41.$$

Середнє квадратичне відхилення знаходимо за формулою (6.2.3):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,41} \approx 0,64.$$

Приклад 6.2.2.

Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка задана щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2}{25}x, & 0 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Для заданої неперервної випадкової величини X математичне сподівання обчислюємо за формулою (6.1.3):

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot \frac{2}{25} x dx = \frac{2}{25} \int_0^5 x^2 dx = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{2}{75} (5^3 - 0) = \frac{10}{3}.$$

Дисперсію $D(X)$ обчислюємо за формулою (6.2.2).

Оскільки
$$M(X^2) = \int_0^5 x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2}{25} x dx = \frac{2}{25} \int_0^5 x^3 dx =$$
$$= \frac{2}{25} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^5 = \frac{1}{50} \cdot (5^4 - 0) = \frac{1}{50} \cdot 625 = \frac{25}{2},$$

тоді

$$D(X) = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{2} - \frac{100}{9} = \frac{225 - 200}{18} = \frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення згідно формули (6.2.3) складає у нашому випадку:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1,17.$$

Завдання для практичного заняття 12
Числові характеристики дискретної випадкової величини

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

а)

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

б)

x_i	-2	-1	0	4
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Знайти її числові характеристики.

2. Обчислити математичне сподівання випадкової величини $Z = X + 2Y$, якщо відомі математичні сподівання $M(X) = 5$ і $M(Y) = 3$.
3. Випадкові величини X і Y незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = 3X + 2Y$, якщо відомо, що $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$.
4. Дискретна випадкова величина X набуває три можливих значення: $x_1 = 4$ з ймовірністю $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ з ймовірністю $p_2 = 0,3$ і x_3 з ймовірністю p_3 . Скласти з вихідних величин закон розподілу. Знайти x_3 і p_3 , якщо відомо, що $M(X) = 8$.
5. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а також відомі математичні сподівання цієї величини і її квадрата: $M(X) = 2,3$, $M(X^2) = 5,9$. Знайти ймовірності, що відповідають можливим значенням X .
6. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

x_i	-0,1	x_2	0,2	0,4
p_i	0,3	0,1	p_3	p_4

Знайти x_2 , p_3 , p_4 , якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 0,13$ і дисперсія $D(X) = 0,0341$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

x_i	-1	3	x_3
p_i	0,1	p_2	0,5

і відоме її математичне сподівання $M(X) = 1,1$.

Знайти невідомі x_3 та p_2 , функцію розподілу $F(x)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Завдання для практичного заняття 12

Числові характеристики неперервної випадкової величини

1. Неперервну випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2(x-2), & 2 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти її числові характеристики.

2. Неперервну випадкову величину X задано щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ -6x^2 + 18x - 12, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Обчислити її математичне сподівання.

3. Знайти числові характеристики випадкової величини X , заданої функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

4. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ A\left(\frac{x}{2} + 1\right), & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Визначити параметр A . Знайти щільність ймовірності. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Неперервну випадкову величину X задано функцією $F(x)$ розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 1, & \text{при } x > e; \end{cases}$$

- а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;
- б) обчислити числові характеристики випадкової величини X ;
- в) визначити ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(1, 2)$.

Четвертий змістовий модуль (ЗМ4): ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Лекція 7. Статистичне оцінювання параметрів розподілу

7.1. Основні задачі математичної статистики

Математичною статистикою називається наука, яка займається розробкою методів відбору, опису та аналізу дослідних даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ.

У свою чергу, встановлення цих закономірностей ґрунтується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних – результатів дослідів або спостережень.

Отже, математична статистика вивчає методи, які дають змогу за результатами випробувань робити певні ймовірнісні висновки.

Задачі математичної статистики:

- 1) вказати способи збору та групування (якщо даних дуже багато) статистичної інформації;
- 2) визначити закон розподілу випадкової величини або системи випадкових величин за статистичними даними;
- 3) оцінити невідомі параметри розподілу;
- 4) перевірити правдоподібність припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення оцінюваного параметра.

Основне завдання математичної статистики – розроблення методів аналізу статистичних даних залежно від мети дослідження.

Методи математичної статистики ефективно використовують під час розв'язування багатьох наукових задач, задач щодо організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

Математична статистика виникла (XVII ст.) та почала розвиватись паралельно з теорією ймовірностей. Подальшим розвитком (кінець XIX – початок XX ст.) математична статистика зобов'язана П. Л. Чебишову, А. А. Маркову, О. М. Ляпунову, К. Гауссу, Ф. Гальтону, К. Пірсону та ін.

У XX ст. найбільший внесок у математичну статистику зробили В. І. Романовський, Е. Е. Слуцький, А. Н. Колмогоров, Ст'юдент (псевдонім В. Госсета), Е. Пірсон, Ю. Нейман, А. Вальд, А. В. Скороход.

7.2. Генеральна та вибіркова сукупності

Кожен об'єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Розглядаючи лише одну ознаку кожного об'єкта, припускають, що інші ознаки несуттєві, тобто множина об'єктів однорідна. Наприклад, розглядаючи роботу спеціаліста, можна досліджувати його завантаженість, тип клієнтів, швидкість обслуговування тощо. Кожна така ознака утворює випадкову величину, спостереження над якою проводяться.

Множину однорідних об'єктів називають **статистичною сукупністю**. **Вибірковою сукупністю (вибіркою)** називають сукупність випадково взятих об'єктів із статистичної сукупності.

Генеральною називають сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку. **Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної)** називають кількість об'єктів цієї сукупності.

Вибіркою називають послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n$ незалежних однаково розподілених випадкових величин, розподіл кожної з яких збігається з розподілом генеральної випадкової величини.

Кількість об'єктів (спостережень) у вибірці n називається **об'ємом вибірки**, а значення x_i вибірки – **варіантами**.

Існують повторні і безповторні вибірки. У першому випадку відібраний об'єкт повертається у генеральну сукупність, а у другому – не повертається. На практиці в основному використовується безповторна вибірка.

7.3. Статистичний розподіл вибірки та його графічні представлення.

Емпірична функція розподілу.

Нехай з генеральної сукупності зроблено вибірку об'ємом n . Значення x_1 у вибірці повторюється n_1 раз, значення x_2 – n_2 раз, ..., значення x_k – n_k раз. При цьому

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \quad \text{– об'єм вибірки.}$$

Варіаційним рядом називають послідовність всіх елементів вибірки, розміщених у порядку зростання. Однакові елементи повторюються. Числа n_i називають **частотами**, а відношення їх до об'єму вибірки – **відносними частотами (частотями)**, тобто

$$p_i^* = \frac{n_i}{n}. \quad (7.3.1)$$

Причому

$$\sum_{i=1}^k p_i^* = 1.$$

Статистичним рядом називають перелік варіант і відповідних їм частот або частостей. Записують статистичний ряд у вигляді таблиці.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

– статистичний ряд частот.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
p_i^*	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\dots$	$\frac{n_k}{n}$

– статистичний ряд
відносних частот.

Даний статистичний ряд ще називають дискретним статистичним рядом.

Статистичний ряд можна зобразити графічно у вигляді **полігона** (многокутника), відкладаючи по осі абсцис елементи статистичного ряду, а по осі ординат – частоти або частоті. Отримані точки площини з'єднуються відрізками.

У випадку, коли вибірка отримана із неперервної генеральної сукупності і об'єм її великий, складають **інтервальний статистичний ряд**. В перший ряд його вписуються частинні проміжки $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{k-1}, x_k)$, які беруться однакової довжини $h = x_{i+1} - x_i$. У другий ряд вписуються частоти n_i попадання елементів вибірки в розглядувані проміжки.

Для визначення кількості проміжків k використовується напівемпірична формула

$$k = 1,72n^{1/3}. \quad (7.3.2)$$

Отже, при $n=40 \Rightarrow k=6$; $n=100 \Rightarrow k=8$; при $n=200 \Rightarrow k=10$ і т.д. Також застосовують формулу Старджеса $k = 1 + \log_2 n$. Довжину проміжків знаходять за формулою:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \quad (7.3.3)$$

де $x_{\min}$, $x_{\max}$ – найменша та найбільша варіанта відповідно. За початок першого інтервалу рекомендується брати величину:

$$x_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}. \quad (7.3.4)$$

Інтервальний статистичний ряд можна графічно зобразити у вигляді гістограми.

Гістограмою частот (частостей) називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h , а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ – щільності частоти ($\frac{p_i^*}{h}$ – щільності частоті).

Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки, а площа гістограми частостей дорівнює одиниці.

Якщо з'єднати середини верхніх основ прямокутників відрізками прямої, то отримаємо полігон того ж розподілу.

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x частість події $\{X < x\}$:

$$F^*(x) = p^*\{X < x\}. \quad (7.3.5)$$

Для знаходження значень емпіричної функції зручно $F^*(x)$ записати у вигляді:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \quad (7.3.6)$$

де n – об'єм вибірки, n_x – число спостережень, менших за x .

Оскільки відносна частота події наближається до ймовірності цієї події при збільшенні n , то вибіркова функція розподілу $F^*(x)$ наближено представляє функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності, тобто є її оцінкою:

$$F^*(x) \approx F(x). \quad (7.3.7)$$

7.4. Числові характеристики вибірки

Вибірковим середнім $\bar{x}$ називають середнє арифметичне всіх значень вибірки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (7.4.1)$$

Вибіркове середнє дискретного статистичного ряду знаходять за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i. \quad (7.4.2)$$

Вибіркове середнє інтервального статистичного ряду знаходять за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* n_i, \quad (7.4.3)$$

де $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ – середина інтервалу $[x_i; x_{i+1})$.

Вибірковою дисперсією D^* називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень вибірки від вибіркового середнього $\bar{x}$:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (7.4.5)$$

Вибіркову дисперсію дискретного статистичного ряду знаходять за формулою:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x})^2. \quad (7.4.6)$$

Вибіркову дисперсію інтервального статистичного ряду знаходять за формулою:

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^{*2} n_i - (\bar{x})^2. \quad (7.4.7)$$

Середнє квадратичне відхилення вибірки визначається формулою:

$$\sigma^* = \sqrt{D^*}. \quad (7.4.8)$$

При розв'язуванні практичних задач часто використовується **виправлена дисперсія**, яка обчислюється наступним чином:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^*. \quad (7.4.9)$$

Величину $S = \sqrt{S^2}$ називають **виправленим середнім квадратичним відхиленням**.

Завдання для практичного заняття 14

Основні характеристики вибірки

1. Побудувати емпіричну функцію розподілу по даній вибірці:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 6; \quad x_3 = 10; \quad n_1 = 12; \quad n_2 = 18; \quad n_3 = 30.$$

2. Після підбиття підсумків за семестр група студентів отримала наступні нормовані бали:

30, 20, 10, 50, 40, 20, 30, 30, 10, 40, 0, 30, 10, 40, 30, 50, 30, 50, 50, 40.

а) Скласти статистичний ряд і побудувати полігон відносних частот;

б) знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік;

в) знайти вибіркові характеристики: середнє арифметичне, дисперсію, середнє квадратичне відхилення

3. Задано вибірку неперервної випадкової величини:

44,1; 22,6; 24,8; 29,4; 40,8; 21,1; 26,6; 32,4; 33,1; 25,7; 37,1; 31,4; 32,4; 38,2; 44,5; 42,8; 39,3; 28,8; 20,5; 30,5.

а) Скласти інтервальний статистичний ряд, розбивши весь діапазон на інтервали і побудувати гістограму;

б) знайти емпіричну функцію розподілу.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Побудувати емпіричну функцію розподілу, полігон частот та полігон відносних частот для вибірки:

x_i	0	2	5	6	7
n_i	3	5	4	2	6

2. На телефонній станції проводиться спостереження за кількістю неправильних з'єднань за хвилину. Результати спостережень протягом години представлені в таблиці:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	8	17	16	10	6	2	1

Знайти вибіркові характеристики: середнє арифметичне, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Лекція 8. Інтервальне оцінювання параметрів розподілу

8.1. Надійні інтервали

Точкові оцінки, хоч і мають властивості спроможності та незсуненості, які дають впевненість що дана оцінка якісна порівняно з іншими можливими, але вони не дають всієї бажаної інформації про оцінювані генеральні характеристики. Тому варто зв'язати точкову оцінку з об'ємом вибірки, виробити показники її точності та надійності. Ці питання вирішуються в теорії інтервального оцінювання.

Нехай θ – невідома числова характеристика або параметр генерального розподілу. Інтервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, що покриває з ймовірністю γ істинне значення параметра θ , називають **надійним інтервалом**, а ймовірність γ – **надійністю оцінки (надійною ймовірністю)**.

В основному надійний інтервал вибирають симетрично відносно незсуненої точкової оцінки $\tilde{\theta}$, тобто вибирається інтервал $(\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$ такий, що

$$P\{\tilde{\theta} - \varepsilon < \theta < \tilde{\theta} + \varepsilon\} = \gamma. \quad (8.1.1)$$

Число $\varepsilon > 0$ характеризує точність оцінки: чим менше різниця $|\theta - \tilde{\theta}|$, тим точніша оцінка.

Величина γ вибирається наперед, в основному γ приймають рівною 0,9; 0,95; 0,99 тощо.

8.2. Надійний інтервал для математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії

Нехай задано генеральну сукупність з нормальним розподілом $X \in N(m, \sigma)$, де σ відоме, надійність γ задана.

Надійний інтервал для математичного сподівання m при відомій дисперсії знаходять за формулою:

$$\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right). \quad (8.2.1)$$

Тут n – об'єм вибірки, а значення t обчислюють за формулою $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ з

таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (див. додаток табл. 2).

Зі збільшенням обсягу n вибірки число $\varepsilon = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ зменшується, тобто точність оцінки підвищується. Зростання надійності $\gamma = 2\Phi(t)$ веде до збільшення t , отже, до зростання ε , або до зниження точності.

Приклад 8.2.1.

Нехай $\sigma = 2$, $n = 25$, $\gamma = 0,95$. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання m , якщо $\bar{x} = 5$.

Розв'язання.

Для обчислення t використаємо рівняння:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$$

Із таблиці значень функції Лапласа (табл. 2 додатку) визначаємо $t = 1,96$.
Тоді

$$\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{25}} = 0,784.$$

Маємо надійний інтервал для математичного сподівання m :

$$(5 - 0,784, \quad 5 + 0,784) \\ \text{або} \\ (4,216, \quad 5,784).$$

Цей результат можна розуміти так: якщо зроблена достатньо велика кількість вибірок, то в 95 % випадків значення m належить знайденому інтервалу, а в 5 % це значення m може вийти за межі інтервалу.

8.3. Надійний інтервал для математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії

Нехай задано генеральну сукупність з нормальним розподілом $X \in N(m, \sigma)$, де σ – невідоме, надійність γ – задана.

Введемо статистику

$$T = \frac{\bar{x} - m}{S / \sqrt{n}}, \quad (8.3.1)$$

яка містить похибку $(\bar{x} - m)$ оцінки m і не містить невідомого σ .

Тут S – виправлене середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , обчислене за вибіркою. Дана статистика має ***t-розподіл Стюдента*** з $k = n - 1$ ступенями вільності.

Надійний інтервал математичного сподівання m при невідомій дисперсії знаходять за формулою:

$$\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \right). \quad (8.3.2)$$

Тут t_γ визначають за формулою $P\{|T_{n-1}| > t_\gamma\} = 1 - \gamma$ з таблиці *t-розподілу Стюдента* (див. додаток табл. 6).

Приклад 8.3.1.

Нехай X – нормально розподілена випадкова величина, яка має такі параметри: $n = 25$, $\bar{x} = 20$, $S = 0,4$. Знайти надійний інтервал для оцінювання математичного сподівання m , якщо $\gamma = 0,95$.

Розв’язання.

Знаходимо t_γ з таблиці 6 додатку: $t_\gamma = t(0,95; 25 - 1) = 2,064$.

Тоді

$$t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 2,064 \cdot \frac{0,4}{5} \approx 0,165.$$

Отже, надійний інтервал для m наступний:

$$(20 - 0,165, 20 + 0,165)$$

або

$$(19,835; 20,165).$$

8.4. Надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення нормального розподілу при відомому математичному сподіванні

Нехай задано генеральну сукупність з нормальним розподілом $X \in N(m, \sigma)$, де σ – відоме, надійність γ – задана.

Якщо математичне сподівання m відоме, то надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення σ має вигляд:

$$\left(\frac{\sqrt{n}S_0}{\sqrt{\chi_2^2}}, \frac{\sqrt{n}S_0}{\sqrt{\chi_1^2}} \right), \quad (8.4.1)$$

де n – об'єм вибірки, $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$.

χ_1^2 знаходять за формулою $P\{\chi_{n-1}^2 > \chi_1^2\} = \frac{1+\gamma}{2}$,

$\chi_2^2 = P\{\chi_{n-1}^2 > \chi_2^2\} = \frac{1-\gamma}{2}$ з таблиці χ^2 -розподілу (табл. 5 додатку), де

число ступенів вільності $k = n - 1$.

8.5. Надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення нормального розподілу при невідомому математичному сподіванні

Нехай задано генеральну сукупність з нормальним розподілом $X \in N(m, \sigma)$, де σ – невідоме, надійність γ – задана.

Якщо математичне сподівання m невідоме, то надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення σ має вигляд:

$$\left(\frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi_2^2}}, \frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi_1^2}} \right), \quad (8.5.1)$$

де n – об'єм вибірки, S – виправлене середнє квадратичне відхилення.

χ_1^2, χ_2^2 знаходяться за формулами:

$$P\{\chi_{n-1}^2 > \chi_1^2\} = \frac{1+\gamma}{2}, \quad P\{\chi_{n-1}^2 > \chi_2^2\} = \frac{1-\gamma}{2} \quad (8.5.2)$$

відповідно з таблиці χ^2 -розподілу (табл. 5 додатку), де число ступенів вільності $k = n - 1$.

Або, що те саме, формули для знаходження χ_1^2 , χ_2^2 :

$$P(\chi^2(k) > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad P(\chi^2(k) > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}, \quad (8.5.3)$$

де $\alpha = 1 - \gamma$.

Аналогічно, маємо надійний інтервал для дисперсії σ^2 :

$$\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi_2^2}, \frac{S^2(n-1)}{\chi_1^2} \right). \quad (8.5.4)$$

Приклад 8.5.1.

Виконано 10 вимірів одним приладом без систематичних похибок деякої фізичної величини. Виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових похибок вимірів виявилось рівне $S = 0,5$. Вважаючи результати вимірів розподіленими нормально, знайти точність приладу з надійністю $\gamma = 0,95$.

Розв'язання.

Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових похибок вимірів. Отже, потрібно відшукати надійний інтервал, який покриває σ із заданою надійністю $\gamma = 0,95$. Надійний інтервал для σ визначимо за формулою (8.5.1).

При $k = n - 1$, $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$ значення χ_1^2, χ_2^2 знаходимо за таблицею розподілу Пірсона (табл. 5 додатку).

Для ймовірностей:

$$P(\chi^2(k) > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975, \quad P(\chi^2(k) > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

із табл. 5 знаходимо $\chi_1^2 = 2,56$, $\chi_2^2 = 19,7$.

Отже, маємо інтервальну оцінку:

$$\frac{0,5\sqrt{9}}{\sqrt{19,7}} < \sigma < \frac{0,5\sqrt{9}}{\sqrt{2,56}}$$

або

$$0,338 < \sigma < 0,938.$$

Завдання для практичного заняття 15
Знаходження надійних інтервалів параметрів розподілу

1. Автомат, що розливає моторне мастило, має забезпечувати нормальний розподіл об'єму із стандартним відхиленням $\sigma = 2,25$ мл. Для контролю було відібрано $n=25$ пляшок, в яких середній об'єм $\bar{x} = 1002$ мл. З надійністю $\gamma = 0,95$ знайти надійний інтервал для середнього об'єму моторного мастила в пляшках у генеральній сукупності.

2. Виконано 5 незалежних спостережень над випадковою величиною $X \in N(m, \sigma)$. Задані вибіркове середнє $\bar{x} = 4$ та виправлена дисперсія $S^2 = 660,5$. Побудувати для математичного сподівання $M(X)=m$ надійний інтервал із надійністю $\gamma = 0,95$.

3. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання нормального розподілу $X \in N(m, \sigma)$, якщо $n=25$; $\bar{x} = 16,8$; $\sigma^2 = 25$; $\alpha = 0,01$.

4. Для оцінки параметра нормально розподіленої випадкової величини була зроблена вибірка об'єму 30 одиниць і обчислено $S = 1,5$. Знайти надійний інтервал, що покриває σ з ймовірністю $\gamma = 0,9$.

5. Зроблено $n = 20$ вимірів параметра, що контролюється, певної продукції. За отриманою вибіркою знайдено значення вибіркового середнього квадратичного відхилення $S = 0,25$. Потрібно побудувати надійний інтервал для σ з ймовірністю $\gamma = 0,95$. (σ характеризує розкидання значень параметру, що контролюється).

6. За вибіркою з нормального розподілу

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	4	3	4	6	2	1

з надійністю 0,97 знайти інтервальні оцінки для параметра m , якщо $\sigma^2 = 4$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання нормального розподілу $X \in N(m, 4)$, якщо $n=36$; $\bar{x} = 10,3$; $\gamma = 0,96$.

2. Над нормально розподіленою випадковою величиною проведено $n=31$ спостереження, у результаті чого отримали $\bar{x} = 58,6$, $S^2 = 33,43$. Знайти 90% інтервал надійності для дисперсії σ^2 .

Модульна контрольна робота №2

Завдання 1.

Неперервну випадкову величину X задано функцією $F(x)$ розподілу:

а) Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$;

в) визначити двома способами (за функціями $f(x)$ і $F(x)$) ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу (a, b) .

$$\text{1 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$\text{2 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + x)}{6}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$\text{3 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{9}, & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{4 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$\text{5 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^2}{25}, & \text{при } -2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 0, b = 2.$$

$$\text{6 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{(x+3)^2}{9}, & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad a = -2, b = -1.$$

$$\text{7 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{(x-3)^2}{4}, & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1, & \text{при } x > 5; \end{cases} \quad a = 3, b = 4.$$

$$\text{8 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(2x^2 + x)}{10}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{9 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$\text{10 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{25}, & \text{при } -1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4; \end{cases} \quad a = 1, b = 3.$$

$$\text{11 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^2}{16}, & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{12 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ (3x-3)^2, & \text{при } 1 < x \leq \frac{4}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{4}{3}; \end{cases} \quad a = 1, b = 1,5.$$

$$\text{13 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 5, \\ \frac{(x-5)^2}{4}, & \text{при } 5 < x \leq 7, \\ 1, & \text{при } x > 7; \end{cases} \quad a = 5, b = 6.$$

$$\text{14 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{(x-2)^2}{16}, & \text{при } 2 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при } x > 6; \end{cases} \quad a = 3, b = 5.$$

$$\text{15 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{(x+3)^2}{25}, & \text{при } -3 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = -1, b = 1.$$

$$\text{16 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 3x)}{18}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$\text{17 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 2x)}{8}, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$\text{18 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ \frac{(x-4)^2}{16}, & \text{при } 4 < x \leq 8, \\ 1, & \text{при } x > 8; \end{cases} \quad a = 5, b = 7.$$

$$\text{19 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{(x^2 + 2x)}{15}, & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$\text{20 – варіант: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ (2x-4)^2, & \text{при } 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{5}{2}; \end{cases} \quad a = 2, b = 2,2.$$

Завдання 2.

Випадкову величину X задано щільністю ймовірності $f(x)$. Знайти функцію $F(x)$ розподілу випадкової величини X .

$$\mathbf{1-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{5}{2}, \\ 4(2x-5), & \frac{5}{2} < x \leq 3, \\ 0, & x > 3; \end{cases}$$

$$\mathbf{2-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{2}{3}, \\ 6(3x-2), & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\mathbf{3-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 18(x-1), & 1 < x \leq \frac{4}{3}, \\ 0, & x > \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\mathbf{4-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$\mathbf{5-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 8(x-2), & 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 0, & x > \frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$\mathbf{6-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ 4(2x+1), & -\frac{1}{2} < x \leq 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{7-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$\mathbf{8-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\mathbf{9-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 2(x-3), & 3 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4; \end{cases}$$

$$\mathbf{10-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ -\frac{3}{4}(x^2-1), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$11\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 8(x-1), & 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & x > \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$12\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 16(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & x > \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$13\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{4}, \\ 8(4x-1), & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$14\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$15\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{6}{5}(x^2 + x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$16\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$17\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{3}{32}(4-x^2), & -2 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$18\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2x, & 2 < x \leq 6, \\ 0, & x > 6; \end{cases}$$

$$19\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{7}{12}(1-x^6), & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$20\text{-в.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 6(x-x^2), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

Завдання 3.

Дискретну випадкову величину X задано таблично і відоме її математичне сподівання $M(X)$. Знайти:

- 1) невідомі x_i та p_i .
- 2) функцію розподілу $F(x)$.
- 3) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1 – варіант

x_i	x_1	2	3
p_i	0,4	p_2	0,3

$$M(X) = 1,9.$$

2 – варіант

x_i	2	x_2	5
p_i	p_1	0,4	0,3

$$M(X) = 3,3.$$

3 – варіант

x_i	1	2	x_3
p_i	0,2	p_2	0,3

$$M(X) = 2,1.$$

4 – варіант

x_i	-1	x_2	3
p_i	0,4	0,1	p_3

$$M(X) = 1,2.$$

5 – варіант

x_i	-1	3	x_3
p_i	0,1	p_2	0,5

$$M(X) = 4,6.$$

6 - варіант

x_i	0	x_2	4
p_i	0,4	0,1	p_3

$$M(X) = 2,2.$$

7 - варіант

x_i	x_1	1	3
p_i	0,4	0,2	p_3

$$M(X) = 1.$$

8 - варіант

x_i	0	2	x_3
p_i	p_1	0,1	0,3

$$M(X) = 1,4.$$

9 – варіант

x_i	-2	x_2	2
p_i	0,2	0,3	p_3

$$M(X) = 0,6.$$

10 - варіант

x_i	-2	2	x_3
p_i	0,2	p_2	0,5

$$M(X) = 3,2.$$

11 - варіант

x_i	x_1	1	3
p_i	0,2	0,6	p_3

$$M(X) = 1.$$

12 - варіант

x_i	x_1	2	4
p_i	0,5	p_2	0,2

$$M(X) = 1,4.$$

13 - варіант

x_i	1	3	x_3
p_i	0,1	p_2	0,4

$$M(X) = 3,6.$$

14 - варіант

x_i	-1	x_2	1
p_i	0,2	0,2	p_3

$$M(X) = 0,4.$$

15 - варіант

x_i	-2	1	x_3
p_i	0,1	p_2	0,5

$$M(X) = 2,2.$$

16 - варіант

x_i	1	x_2	3
p_i	0,4	0,2	p_3

$$M(X) = 2.$$

17 - варіант

x_i	x_1	1	2
p_i	0,2	0,3	p_3

$$M(X) = 1,3.$$

18- варіант

x_i	-2	x_2	2
p_i	0,1	0,3	p_3

$$M(X) = 1.$$

19 - варіант

x_i	2	x_2	4
p_i	p_1	0,3	0,2

$$M(X) = 2,7.$$

20 – варіант

x_i	0	2	x_3
p_i	0,5	p_2	0,2

$$M(X) = 1,4.$$

Завдання 4.

За результатами спостережень над випадковою величиною X , представлених у таблицях нижче, знайти вибірку функцію розподілу, вибіркове середнє і незсунену оцінку дисперсії.

1-В	x_i	-1	1	2	3	4	5
	n_i	3	8	20	16	7	2

2-В	x_i	-2	-1	0	1	2	3
	n_i	2	8	20	9	8	3

3-В	x_i	1	2	3	4	5	6
	n_i	5	8	15	12	7	3

4-В	x_i	-2	-1	0	1	2	3
	n_i	3	12	20	8	5	2

5-В	x_i	-3	-2	-1	0	1	2
	n_i	2	6	25	10	5	2

6-В	x_i	-4	-3	-1	0	2	3
	n_i	1	7	23	10	7	2

7-В	x_i	-1	0	1	3	4	5
	n_i	3	9	18	10	8	2

8-В	x_i	-2	-1	2	3	4	5
	n_i	5	10	15	8	7	5

9-В	x_i	-3	-2	-1	1	2	3
	n_i	1	7	25	10	5	2

10-В	x_i	0	1	2	3	4	6
	n_i	2	7	20	10	8	3

11-В	x_i	-2	0	1	2	3	4
	n_i	2	7	19	15	6	1

12-В	x_i	-3	-2	-1	0	1	2
	n_i	1	7	19	8	7	2

13-В	x_i	0	1	2	3	4	5
	n_i	4	7	14	11	6	2

14-В	x_i	-3	-2	-1	0	1	2
	n_i	2	11	19	7	4	1

15-В	x_i	-4	-3	-2	-1	0	1
	n_i	1	5	24	9	4	1

16-В	x_i	-5	-4	-2	-1	1	2
	n_i	0	6	22	9	6	1

17-В	x_i	-2	-1	0	2	3	4
	n_i	2	8	17	9	7	1

18-В	x_i	-3	-2	1	2	3	4
	n_i	4	9	14	7	6	4

19-В	x_i	-4	-3	-2	0	1	2
	n_i	0	6	24	9	4	1

20-В	x_i	-1	0	1	2	3	5
	n_i	1	6	19	9	7	2

Завдання 5.

Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання μ нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркове середнє $\bar{X}$, об'єм вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ .

№ варіанту	$\bar{X}$	n	σ
1	75,17	36	6
2	75,15	64	8
3	75,13	100	10
4	75,11	144	12
5	75,09	196	14
6	74,17	35	5
7	74,15	63	7
8	74,12	99	9
9	73,11	142	11
10	74,20	194	13
11	76,15	38	7
12	76,20	66	9
13	76,13	102	11
14	76,12	146	14
15	76,10	198	15
16	74,16	48	6
17	74,14	80	8
18	74,12	120	10
19	74,10	166	12
20	74,08	222	14

ДОДАТКИ

Таблиця 1.

$$\text{Значення функції } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3443	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3102	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1892	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1551	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0914	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0003
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2.

$$\text{Значення функції Лапласа } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17367	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27034	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43443	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46107	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47493	47527	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48464	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49299	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49306	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966	
3,5	49977	3,6	49981	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995	
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Таблиця 3. Розподіл Пуассона

$$\text{Значення функції } p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3176	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Таблиця 4.

Значення функції нормованого нормального розподілу

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0.1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0.2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0.3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0.4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67721	68082	68439	68793
0.5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0.6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0.7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0.8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0.9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1.0	84134	84375	84614	84850	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1.1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1.2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1.3	90320	90490	40658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1.4	91924	92073	42220	92364	92507	92647	92786	92922	93056	93189
1.5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1.6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1.7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1.8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1.9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2.0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	48124	98169
2.1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2.2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2.3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2.4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2.5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99500	99520
2.6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2.7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2.8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2.9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3.0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3.1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3.2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3.3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3.4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3.5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3.6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3.7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3.8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3.9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997
4.0	99997	99998	99999	99999	99999	—	—	—	—	—

Таблиця 5.

 χ^2 -розподіл (розподіл Пірсона)

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = \alpha$$

$k \backslash \alpha$	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00016	0,0063	0,393	0,0158	0,0642	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,230	1,564	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	29,633	32,001
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,968	41,633
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,112	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,304	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Таблиця 6.
t-розподіл (розподіл Стюдента)

$$P(t > t_{\alpha}) = \alpha, \quad P(|t| > t_{\alpha}) = \alpha$$

k	Одностороння критична область (α)							
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
	Двостороння критична область (α)							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,30	636,61
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
7	1,11	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,85	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	3,69	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,65	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,58	3,88
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,53	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,51	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,48	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,47	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08	3,45	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,44	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,42	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,41	3,67
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,04	3,40	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,31	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,23	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,85	3,16	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,09	3,29

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Агапова І.С., Бондаренко М.Ф., Дікарєв В.А., Семенець В.В. **Збірник задач з теорії ймовірностей з розв'язками: Навч. посібник** / За ред. М.Ф. Бондаренка – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 356 с.
2. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. **Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. підручник.** – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 440 с.
3. Денисюк В.П, Бобков В.М., Погребецька Т.А., Репета В.К. Вища математика: у 4 ч.: **Навч. посібник.** – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2006. – (Модульна технологія навчання). – Ч. 4: **Теорія ймовірностей і математична статистика.** – 256 с.
4. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Методичні вказівки та індивідуальні завдання для студентів стаціонарної форми навчання / Укл. В.Г. Дегтярь, Я.Г. Ляшенко, О.І. Борщ та ін. – К.: НТУ, 2010. – 252 с.
5. Іванюта І.Д., Рибалка В.І., Рудоміно-Дусятська І.А. **Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник** для студ. вищих навчальн. закладів. – К.: Слово, 2003. – 272 с.
6. Комбінаторне, імовірнісне мислення та математична статистика. Збірник завдань із повними розв'язками / Упоряд. Ю.О. Захарійченко, Л.І. Захарійченко, В.К. Репета, Л.А. Репета – К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2014. – 128 с.
7. Левковская Л.В., Ващилина Е.В. Высшая математика. Методические указания и практикум по теории вероятностей и математической статистике для студентов – иностранцев. Кредитно – модульная система обучения. – К., НТУ, 2012, – 169 с.
8. Методичні вказівки з теорії ймовірностей та математичної статистики. Укл.: Ю.Є. Печеніжський, С.О. Станішевський, В.С.Рухляда. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 64 с.
9. **Теорія ймовірностей та математична статистика:** навч. посіб. / О. І. Кушлик - Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабальук. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.
10. **Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник** / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів: ЛьвДУВС, 2017. – 292 с.